Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 9

Aufgabe 34: Stereographische Projektion (×)

Betrachte die 2-Sphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$ mit Radius 1 in $\mathbb{R}^3$. Die *stereographische Projektion* ordnet jedem Punkt $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$ auf der Sphäre einen Punkt auf der x-y-Ebene zu, nämlich den Schnittpunkt der x-y-Ebene mit der Geraden, welche den Nordpol $\boldsymbol{N} = (0,0,1)$ und den Punkt $\boldsymbol{x}$ verbindet. Identifizieren wir die x-y-Ebene mit $\mathbb{C}$, erhalten wir die Abbildung $s : S^2 \setminus \{\boldsymbol{N}\} \to \mathbb{C}$, $\boldsymbol{x} \mapsto z = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$.

Zeige, dass Kreise auf $S^2 \setminus \{\boldsymbol{N}\}$ unter s auf Kreise in $\mathbb{C}$ abgebildet werden. Zeige, dass Kreise auf S^2, die durch $\boldsymbol{N}$ gehen auf Geraden in $\mathbb{C}$ abgebildet werden.

Aufgabe 35: (×)

Sei f holomorph in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ und stetig und beschränkt auf dem Abschluss $\bar{\mathbb{H}}$. Zeige, dass für $z = x + iy$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)y}{(t-x)^2+y^2}dt.$$

Hinweis: Verwende die Cauchy Integralformel um zu zeigen, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - \bar{z}}\right)d\xi,$$

wobei Γ das Quadrat mit den Ecken $\pm l$, $2il \pm l$ ist (positiver Umlaufsinn). Verwende dies um zu argumentieren, dass das Cauchy Problem in der oberen Halbebene in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad && \text{auf } y \geq 0 \\ u(t,0) &= u_0(t,0) \qquad && \text{auf } y = 0 \end{aligned}$$

die Lösung

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(t,0)y}{(t-x)^2+y^2}dt.$$

hat.

Aufgabe 36: (×)

Eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{D}^\circ = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < 1\}$ ist ein *Fixpunkt* der Abbildung $f : \mathbb{D}^\circ \to \mathbb{D}^\circ$ falls $f(w) = w$.

a) Zeige, dass $f(z) = z$ auf $\mathbb{D}^\circ$, falls $f : \mathbb{D}^\circ \to \mathbb{D}^\circ$ holomorph ist und zwei verschiedene Fixpunkte hat.

b) Hat jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{D}^\circ \to \mathbb{D}^\circ$ einen Fixpunkt?
Hinweis: Betrachte die obere Halbebene.

Aufgabe 37: $(\times, *, 3P)$

Sei $\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1-\bar{\alpha}z}$ für $|\alpha| < 1$ und $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < 1\}$. Zeige

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} |\psi_\alpha'(x+\mathrm{i}y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$