Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 10

Aufgabe 38: (×)

Bestimme das Bild der Menge $\{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ und ihrem Rand unter der Abbildung $f(z) = \sin(z)$.

Aufgabe 39: (×)

a) Zeige, dass eine Möbiustransformation $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, welche nicht die Identität ist, höchstens zwei Fixpunkte haben kann.

b) Seien $a, b, c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ voneinander verschieden. Zeige, dass es genau eine Möbiustransformation φ gibt, mit $\varphi(a) = \infty$, $\varphi(b) = 0$, $\varphi(c) = 1$.

Aufgabe 40: $(\times, *, 2P)$

Sei $X \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Zeige, dass es keine konforme Abbildung $f : X \to \mathbb{C}$ geben kann.

Hinweis: Riemannscher Abbildungssatz.

Aufgabe 41: (×)

Die Spiegelung am Kreis K mit Mittelpunkt w und Radius $r > 0$ ist die Abbildung auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z \mapsto z_K$, die ∞ auf w und umgekehrt abbildet. Ein Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{w\}$ wird abgebildet auf den Punkt z_K auf dem Strahl ausgehend von w durch z, der auf der gegenüberliegenden Seite vom Kreis liegt und $|z_K - w|/r = r/|z - w|$ erfüllt.

Man zeige: Die Abbildung $z \mapsto (z_K)_{K'}$ (K' ein weiterer Kreis) ist eine Möbiustransformation T.

a) In welcher Beziehung steht T zur Abbildung $z \mapsto (z_{K'})_K$?

b) Was ergibt sich für $K = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $K' = \big\{z \big| |z| = 1\big\}$?

c) Wann ist $T(z) = az + b$?