Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 11

Aufgabe 42: $(\times, *, 3P)$

Zeige dass die Funktion

$$f(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\zeta}\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta-\lambda}}, \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

die reelle Achse auf den Rand eines Rechtecks abbildet.

Dabei bezeichnet $\sqrt{z}$ den Zweig, welcher auf $-\pi/2 < \arg(z) < 3/2\pi$ definiert ist.

Aufgabe 43: $(\times)$

Zeige, dass die Funktion

$$z \mapsto \int_0^z \zeta^{-\beta_1}(\zeta-1)^{-\beta_2}\mathrm{d}\zeta,$$

mit $0 < \beta_1 < 1$, $0 < \beta_2 < 1$ und $1 < \beta_1 + \beta_2 < 2$ die reelle Achse auf den Rand eines Dreiecks abbildet.

Dabei bezeichnet z^{β_i} den Zweig, welcher auf $-\pi/2 < \arg(z) < 3/2\pi$ definiert ist.

Aufgabe 44: Hydrodynamik: Wind über einer Mauer $(\times)$

Wir betrachten den zweidimensionalen Fluss eines perfekten Fluids in der oberen Halbebene mit einer Mauer der Höhe a ausgehend vom Ursprung. Das Gebiet, in welchem sich das Fluidum bewegt ist somit gegeben surch $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\} \setminus (\{0\} \times [0,a])$. Das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ wird durch ein Potential $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ bestimmt:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\varphi.$$

Es erfüllt zusätzlich

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0.$$

a) Definiere die komplexe Funktion $u = v_x + iv_y$ und zeige, dass diese antiholomorph ist (d.h. $\overline{u}$ ist holomorph).

b) Zeige, dass φ der Realteil einer holomorphen Funktion $\Phi : \Omega \to \mathbb{C}$ ist und dass gilt

$$\Phi'(z) = \overline{u(z)}.$$

c) Finde eine konforme Transformation $f : \Omega \to \mathbb{H}$ auf die obere Halbebene.

d) Finde ein komplexes Potential $\widetilde{\Phi} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, für welches das zugehörige komplexe Geschwindigkeitsfeld $\widetilde{u}$ die Randbedingungen

$$\lim_{x\to\pm\infty} \widetilde{u}(x+iy) = (v_\infty, 0)$$

erfüllt.

Hinweis: Bestimme zuerst die antiholomorphe Funktion $\widetilde{u}$ und integriere.

e) Transformiere die Lösung $\widetilde{\Phi}$ auf $\mathbb{H}$ via f zu einer Lösung Φ auf Ω und bestimme das zugehörige komplexe Geschwindigkeitsfeld u.