A1 | Typische Anwendung des Residuensatzes

Berechne den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x.$$

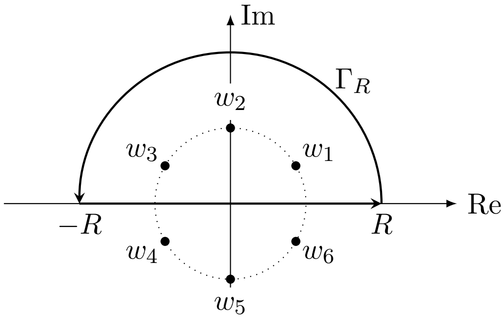
Lösung:

Wir setzen $f(z) := 1/(z^6+1)$ meromorph und verwenden für $R > 1$ folgenden Integrationsweg (Polstellen $w_1, \ldots, w_6$):

Weniger fehleranfällig rechnet man allgemein für $f(z) = 1/(z^{2n}+1)$. Die $2n$ Polstellen sind gegeben durch ($k = 1, \ldots, 2n$)

$$w_k = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)}.$$

Von Γ_R werden die Polstellen für $k = 1, \ldots, n$ umschlossen.



i. Wir schätzen den Beitrag des Kreisbogens ab:

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{i}\,R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{R^6\mathrm{e}^{6\mathrm{i}t}+1}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\pi} \frac{R}{|R^6\mathrm{e}^{6\mathrm{i}t}+1|}\,\mathrm{d}t \le \int_0^{\pi} \frac{R}{R^6-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi R}{R^6-1}$$

Der Beitrag verschwindet also im Limes $R \to \infty$.

Dieses Vorgehen ist äquivalent zur Standardabschätzung

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \mathcal{L}(\Gamma_R)\cdot \sup_{z\in\Gamma_R} |f(z)|,$$

wobei $\mathcal{L}(\Gamma_R) = \pi R$ die Länge des Wegs Γ_R bezeichnet; nebenstehend wird das Supremum direkt angegeben.

ii. Berechne die Residuen an den Polstellen ($k = 1, \ldots, 6$):

$$\mathrm{res}_{w_k}(f) = \lim_{z\to w_k} \frac{(z-w_k)}{z^6+1} = \lim_{z\to w_k} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6w_k^5} = \frac{w_k}{6w_k^6} = -\frac{w_k}{6}$$

Hier erhält man im allgemeinen Fall entsprechend

$$\mathrm{res}_{w_k}(f) = -\frac{w_k}{2n}.$$

iii. Im Limes $R \to \infty$ folgt also mit dem Residuensatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{3} \mathrm{res}_{w_k}(f) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{3}(w_1+w_2+w_3) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}+\mathrm{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Im allgemeinen Fall ergibt sich hier eine geometrische Summe. Summation liefert dann leicht

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{w_k}(f) = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

A2 | Komplexe Wegintegrale

a) Es sei $g(z) := \int_{|t|=2} \frac{t^2-2t+1}{t-z}\,\mathrm{d}t$. Berechne $g'(1+\mathrm{i})$.

b) Berechne $\int_{|z|=8} \frac{1}{\sin(z)}\,\mathrm{d}z$.

c) Berechne $\int_{|z|=1} \overline{z}\,\mathrm{d}z$.

Lösung:

a) Für $|z| < 2$ gilt nach der Cauchy'schen Integralformel

$$g(z) = \int_{|t|=2} \frac{t^2-2t+1}{t-z}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\,(z^2-2z+1).$$

Also ist $g'(z) = 4\pi\mathrm{i}\,(z-1)$, sodass $g'(1+\mathrm{i}) = -4\pi$.

b) Die Pole des Integranden liegen bei $k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ und sind alle von erster Ordnung. Wir berechnen die Residuen:

$$\operatorname{res}_{k\pi}(1/\sin) = \lim_{z\to k\pi} \frac{(z-k\pi)}{\sin(z)} = \lim_{z\to k\pi} \frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{\cos(k\pi)} = (-1)^k.$$

Innerhalb des Kreises $|z| = 8$ liegen die Polstellen 0, $\pm\pi$ und $\pm 2\pi$. Nach dem Residuensatz gilt also

$$\int_{|z|=8} \frac{1}{\sin(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=-2}^{2} \operatorname{res}_{k\pi}(1/\sin) = 2\pi\mathrm{i}\,(1-1+1-1+1) = 2\pi\mathrm{i}.$$

c) Es gilt

$$\int_{|z|=1} \overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

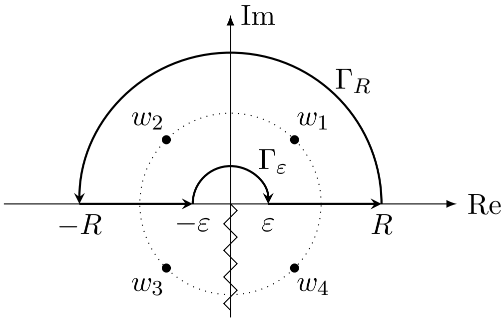
A3 | Integral mit Wurzelfunktion

Berechne den Wert des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

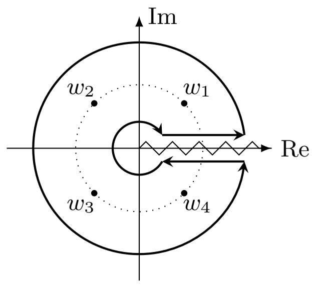
Wir setzen den Integranden durch $f(z) := \sqrt{z}/(1+z^4)$ fort, wobei $\sqrt{\cdot}$ so definiert sei, dass f entlang der negativen imaginären Achse nicht holomorph ist. Wir wählen für $0 < \varepsilon < 1 < R$ folgenden Integrationsweg:



Die Wahl der geschlitzten Ebene entspricht einer Festlegung des Polarwinkels φ_z einer komplexen Zahl $z \neq 0$. Es ist dann

$$\log(z) = \log(|z|) + \mathrm{i}\varphi_z.$$

Hier wäre also $\varphi_z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Wählt man die Schlüsselloch-Methode und den Weg



so sind die Polarwinkel aus $[0, 2\pi)$ zu verwenden.

i. Schätze den Beitrag eines Kreisbogens mit Radius $r > 0, r \neq 1$ ab:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\,\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1+r^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^\pi \left|\frac{r\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{i}t}}{1+r^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}}\right|\mathrm{d}t\\ &\leq \int_0^\pi \frac{r\sqrt{r}}{|1-r^4|}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi r\sqrt{r}}{|1-r^4|}\end{aligned}$$

Der Beitrag verschwindet für $r \searrow 0$ und auch für $r \to \infty$.

ii. Berechne die relevanten Residuen ($k = 1, 2$):

$$\operatorname{res}_{w_k}(f) = \lim_{z\to w_k} \frac{(z-w_k)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log(z)}}{1+z^4} = \frac{w_k\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\arg(w_k)}}{4w_k^4} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}}{2}\arg(w_k)}}{-4}$$

Beachte, dass das Argument einer komplexen Zahl in $(-\pi, \pi]$ liegt; daher gilt diese Darstellung nur für $k = 1, 2, 4$, aber nicht für $k = 3$!

iii. Wegen $\sqrt{-x} = \mathrm{i}\sqrt{x}$ für $x \geq 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int_\infty^0 \frac{\sqrt{-x}}{1+(-x)^4}(-\mathrm{d}x) = \mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

iv. Nach dem Residuensatz gilt also im Limes $\varepsilon \searrow 0$ und $R \to \infty$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\mathrm{i}}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\left(\operatorname{res}_{w_1}(f) + \operatorname{res}_{w_2}(f)\right)\\ &= \frac{2\pi\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}} + \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}}{2}\cdot\frac{3\pi}{4}}}{4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\frac{3\pi\mathrm{i}}{8}} + \mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{8}}}{2}\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right).\end{aligned}$$

Andere mögliche Darstellungen des Ergebnisses wären z.B.

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) &= \frac{\pi}{4\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)}\\ &= \frac{\pi}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}.\end{aligned}$$

A4 | Regularisierung reeller Polstellen

Betrachte für $a, b > 0$ den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{z^2 - b^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \,\mathrm{d}z.$$

a) Skizziere die Lage der Pole des Integranden in der komplexen Ebene.

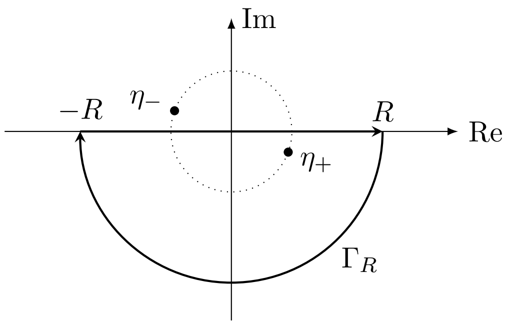
b) Berechne den Grenzwert.

Lösung:

a) Wir finden die Nullstellen des Nenners zu

$$z^2 = b^2 - \mathrm{i}\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{|b^2 - \mathrm{i}\varepsilon|} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\arg(b^2 - \mathrm{i}\varepsilon)} =: \eta_\pm.$$

Für $\varepsilon > 0$ gilt $0 > \frac{1}{2}\arg(b^2 - \mathrm{i}\varepsilon) > -\frac{\pi}{4}$. Demnach liegt η_+ im vierten und η_- im zweiten Quadranten:



b) Wir wählen für $R > |\eta_+|$ den gezeigten Integrationsweg. Den Integranden (ohne Vorfaktor) nennen wir f.

Der entsprechende Kreisbogen durch die obere Halbebene liefert im Limes $R \to \infty$ einen nicht-verschwindenden Beitrag.

i. Schätze den Beitrag des Kreisbogens ab:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}aR\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}(-\mathrm{i})R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{R^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} - b^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}t\right| &\le \int_0^\pi \frac{R\,\mathrm{e}^{-aR\sin(t)}\,\mathrm{d}t}{|R^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} - (b^2 - \mathrm{i}\varepsilon)|} \\
&\le \int_0^\pi \frac{R}{R^2 - |b^2 - \mathrm{i}\varepsilon|}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi R}{R^2 - |b^2 - \mathrm{i}\varepsilon|}
\end{aligned}$$

Der Beitrag verschwindet also für $R \to \infty$.

ii. Berechne das Residuum an der Polstelle η_+:

$$\operatorname{res}_{\eta_+}(f) = \lim_{z\to\eta_+} \frac{(z - \eta_+)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{(z - \eta_+)(z - \eta_-)} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\eta_+}}{\eta_+ - \eta_-}$$

iii. Nach dem Residuensatz gilt im Limes $R \to \infty$ (negativer Umlaufsinn!)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{z^2 - b^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{\eta_+}(f) = \frac{-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\eta_+}}{\eta_+ - \eta_-} \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} \frac{2\pi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ab}}{2\mathrm{i}b}.$$

iv. Für den gesuchten Grenzwert erhalten wir damit

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}}{z^2 - b^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ab}}{2\mathrm{i}b}.$$

A5 | Beweisübungen

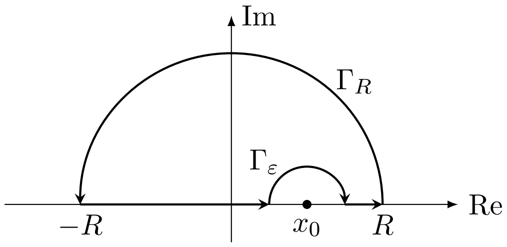
a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph bis auf eine Polstelle erster Ordnung in $x_0 \in \mathbb{R}$. Ferner sei $|f(z)| \leq \frac{1}{1+|z|^2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ und $|z|$ groß genug. Zeige, dass

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right) = \mathrm{i}\pi \ \mathrm{res}_{x_0}(f).$$

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeige: Hat $|f|$ in z_0 ein lokales Minimum, so ist $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant.

Lösung:

a) Betrachte folgenden Integrationsweg in der oberen Halbebene für $R > |x_0|$ groß genug und $0 < \varepsilon < |R - |x_0||$:



Der Beitrag des äußeren Kreisbogens verschwindet im Limes $R \to \infty$, denn

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \pi R \cdot \sup_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \leq \frac{\pi R}{1 + R^2} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Da x_0 ein Pol erster Ordnung ist, existiert eine holomorphe Funktion $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass in einer kompakten Umgebung U von x_0 stets

$$f(z) = \frac{\mathrm{res}_{x_0}(f)}{z - x_0} + H(z).$$

Für ε klein genug ist $\Gamma_\varepsilon \subset U$, sodass

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\pi}^{0} \frac{\mathrm{res}_{x_0}(f) \cdot \mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{x_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - x_0}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} H(z)\,\mathrm{d}z}_{=0,\text{ da } H \text{ in } U \text{ beschränkt}} \\ &= -\mathrm{i}\pi \ \mathrm{res}_{x_0}(f). \end{aligned}$$

Da der Integrationsweg keine Polstellen umschließt, folgt die Behauptung.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. An $z_0 \in \mathbb{C}$ liege ein lokales Minimum von $|f|$. Angenommen, $f(z_0) \neq 0$, dann ist $1/f$ in einer Umgebung U von z_0 holomorph. Dann besitzt $|1/f| = 1/|f|$ in z_0 ein lokales Maximum. Nach dem Maximums-Prinzip ist also $1/f$ und damit auch f konstant auf U. Da f auf einer Menge mit Häufungspunkt konstant ist, ist f auf ganz $\mathbb{C}$ konstant.

A6 | Eigenschaften holomorpher Funktionen

Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ die Einheitsscheibe und $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $D \subset U$ offen. Sei ferner $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant.

a) Es gelte $|f(z)| = 1$ für alle $z \in U$ mit $|z| = 1$.
   i. Zeige, dass f eine Nullstelle in D besitzt.
   ii. Zeige, dass $D \subset f(U)$.

b) Zeige: Wenn $|f(z)| \geq 1$ für alle $z \in U$ mit $|z| = 1$ gilt und ein Punkt $z_0 \in D$ mit $f(z_0) < 1$ existiert, so ist $D \subset f(U)$.

Lösung:

a) i. Da f nicht konstant ist, kann $|f|$ in $\mathring{D}$ nicht maximal werden. Also gilt $|f(z)| < 1$ für $|z| < 1$. Wäre $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathring{D}$, so wäre $1/f$ holomorph in D, $|1/f|$ würde sein Maximum aber in $\mathring{D}$ annehmen. Also gilt $f(z) = 0$ für mindestens ein $z \in \mathring{D}$.

   ii. Zeige $\mathring{D} \subset f(U)$: Sei $z_0 \in \mathring{D}$, also $|-z_0| < 1$. Da $|f(z)| > |-z_0|$ auf der Kreislinie ∂D, besitzt $f(z) - z_0$ nach dem Satz von Rouché mindestens eine Nullstelle in $\mathring{D}$. Also ist $z_0 \in f(U)$.

   Zeige $\partial D \subset f(U)$: Sei $z_0 \in \partial D$. Dann existiert eine Folge (y_n) in $\mathring{D}$ mit $y_n \to z_0$. Nach dem Gesagten findet sich zu jedem y_n ein $x_n \in D$ mit $f(x_n) = y_n$. Da D kompakt ist, besitzt die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $x_0 \in D$. Mit der Stetigkeit von f folgt

$$f(x_0) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = z_0.$$

   Also ist auch in diesem Fall $z_0 \in f(U)$.

b) Die Existenz eines $z_0 \in D$ mit $f(z_0) < 1$ stellt sicher, dass die Argumentation aus ai. weiterhin greift. Wie in aii. folgt damit die Behauptung.