

# Mathematik IV für Physiker\*

Sommersemester 2014

Christian Hainzl mit Vorlage von  
Simon Mayer, Mario Laux und Thomas Rometsch  
Mathematisches Institut  
Uni Tübingen

2. August 2014

\*Diese vorläufige Version des Skriptums ist nur zum Gebrauch parallel zum Besuch der Vorlesung gedacht. Das Studium des Skripts kann den Besuch der Vorlesung **nicht** ersetzen! Falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir diese (auch die offensichtlichen) bitte mit!



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Komplexe Analysis (Funktionentheorie)</b>	<b>1</b>
1.0.0	Einleitung . . . . .	1
1.0.1	holomorphe Funktionen . . . . .	1
1.0.2	Potenzreihen . . . . .	5
1.0.3	Integration entlang Kurven . . . . .	7
1.0.4	Cauchy-Theorem und Anwendungen . . . . .	9
1.0.5	Meromorphe Funktionen . . . . .	19
1.0.6	Singularitäten . . . . .	25
1.0.7	Komplexer Logarithmus . . . . .	32
1.0.8	Konforme Abbildungen . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Abstecher in die Realität - Stabilität von Atomen</b>	<b>45</b>
<b>3</b>	<b>Maßtheorie in einer Dimension</b>	<b>49</b>
3.0.9	Lebesgue-Integral . . . . .	49



# 1 Komplexe Analysis (Funktionentheorie)

## 1.0.0 Einleitung

Wir betrachten Funktionen, die von der Menge der komplexen Zahlen in die Menge der komplexen Zahlen abbilden,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  setzt sich aus Realteil  $x$  und Imaginärteil  $y$  zusammen,  $z = x + iy$ ;  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dabei bezeichnet  $i$  die imaginäre Einheit, für die gilt  $i^2 = -1$ . Das Komplexkonjugierte einer komplexen Zahl ist die selbe Zahl mit Vorzeichenwechsel im Imaginärteil:  $\bar{z} = x - iy$ . Der Betrag einer komplexen Zahl sei definiert durch  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ . Eine geometrische Interpretation komplexer Zahlen ist die Gaußsche Zahlenebene, man trägt den Realteil in  $x$ -Richtung, den Imaginärteil in  $y$ -Richtung auf. Optisch sieht sie dem zweidimensionalen Raum reeller Zahlen  $\mathbb{R}^2$  ähnlich (vgl. Abbildung 1.1), wir werden im Folgenden untersuchen worin die beiden sich unterscheiden.

Dazu definieren wir zuerst was es für eine komplexe Funktion bedeutet, holomorph zu sein.

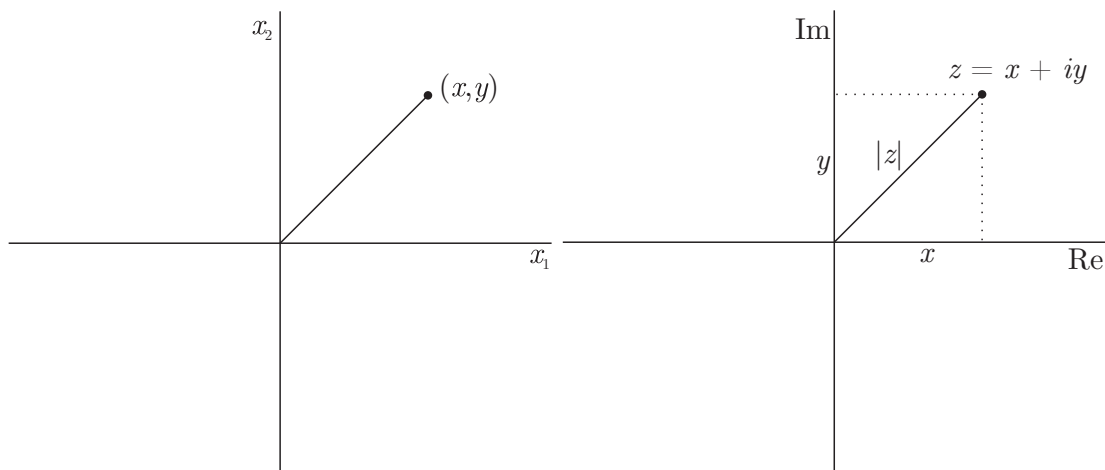


Abbildung 1.1: Die reelle (links) und komplexe (rechts) Ebene im Vergleich.

## 1.0.1 holomorphe Funktionen

### 1.0.1.1 Definition. holomorph

Es sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung.  $f$  heißt HOLOMORPH in  $z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = a$  existiert. Man schreibt dann  $a = f'(z_0)$ . Eine alternative Definition lautet:  $f(z_0 + h) - f(z_0) = ah + \psi(h)$  wobei für  $\psi$  gilt, dass  $\frac{|\psi(h)|}{|h|} \rightarrow 0$  ( $|\cdot|$  ist die euklidische Norm).

Wir betrachten die Funktion  $f(z) = \bar{z} = x - iy$  im Komplexen und analog dazu die zweidimensionale reelle Funktion  $F(x, y) = (x, -y)$ .  $F$  ist total differenzierbar,

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei  $h \in \mathbb{R}$ . Bilden wir nun den Differenzenquotienten und nähern uns zuerst auf der reellen, dann auf der

imaginären Ache der Null, so erhalten wir:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\frac{f(ih) - f(0)}{ih} = \frac{i h - 0}{ih} = -1.$$

Die Funktion  $f(z) = \bar{z}$  ist also nicht holomorph. Dies lässt schon vermuten, dass „holomorph“ ein stärkerer Begriff als die totale Differenzierbarkeit ist. Eigenschaften holomorpher Funktionen sind

- (a)  $f$  holomorph  $\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$ , wobei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Parametrisierung einer Kurve im Komplexen ist.
- (b)  $f$  holomorph  $\Rightarrow f$  unendlich oft differenzierbar und sogar analytisch.
- (c)  $f = g$  auf einer Umgebung  $\Rightarrow f = g$  überall.
- (d) Es gilt der Residuensatz:

$$\int_{\gamma} f dz = \sum F(\text{Singularitäten}),$$

wobei die Singularitäten Polstellen in der komplexen Ebene sind. Dadurch lässt sich z.B. das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  leicht berechnen.

In der komplexen Ebene definiert man Mengen analog wie im Reellen:

$$D_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$$

$$\overline{D_r(z_0)} = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$$

$$C_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| = r\}$$

$$\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\} \quad (\text{Einheitskreisscheibe}).$$

Auch Stetigkeit definiert man analog:  $f$  heißt stetig in  $z_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta \forall z : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ .  
Bemerkung:  $\Rightarrow z \mapsto |f(z)|$  ist dann ebenfalls stetig.

### 1.0.1.2 Satz.

Eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ist beschränkt und nimmt ihr Maximum an,  $\Omega$  kompakt  $\Leftrightarrow$  abgeschlossen und beschränkt.

*Proof.* Siehe Mathematik für Physiker I. □

Wir wenden uns wieder holomorphen Funktionen zu. Ein Beispiel für eine holomorphe Funktion ist die Identität  $f(z) = z$ . Denn bildet man den Differenzenquotient nach Definition, erhält man

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = 1 = f'(z).$$

### 1.0.1.3 Satz.

Seien  $f, g$  holomorph in  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , dann gilt

- (a)  $f + g$  holomorph und  $(f + g)' = f' + g'$ .
- (b)  $fg$  holomorph und  $(fg)' = f'g + fg'$ .
- (c)  $\frac{f}{g}$  holomorph bis auf Nullstellen von  $g$  mit  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ .
- (d)  $f : \Omega \rightarrow U, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann ist  $g \circ f$  holomorph mit  $(g \circ f)' = g'(f(z))f'$ .

*Proof.* Für (b): Seien  $f, g$  holomorph in  $z$ . Das heißt es gilt

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + \psi(h) \quad \frac{|\psi(h)|}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$g(z+h) - g(z) = g'(z)h + \phi(h) \quad \frac{|\phi(h)|}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Wir bilden nun die Differenz  $F(z+h) - F(h)$  mit  $F := fg$ :

$$\begin{aligned}
& f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z) \\
&= f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z+h) + f(z)g(z+h) - f(z)g(z) \\
&= g(z+h)(f'(z)h + \psi(h)) + f(z)(g'(z)h + \phi(h)) \\
&= g(z)(f'(z)h + \psi(h)) + f(z)(g'(z)h + \phi(h)) + \underbrace{(g'(z)h + \phi(h))(f'(z)h + \psi(h))}_{:=A(h)} \\
&= (g(z)f'(z) + f(z)g'(z))h + \underbrace{g(z)\psi(h) + f(z)\phi(h) + A(h)}_{:=\Gamma(h)},
\end{aligned}$$

wobei  $\frac{|\Gamma(h)|}{|h|} \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ .  $\Rightarrow (fg)' = f'g + fg'$ . □

Damit wissen wir sofort, dass jedes Polynom holomorph ist.

#### 1.0.1.4 Bemerkung.

Jedes Polynom  $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  ist holomorph.

Ein weiteres Beispiel ist die Funktion, die einer Zahl ihr Inverses zuordnet,  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Sie ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ , beziehungsweise,  $1/q(z)$ , wobei  $q(z)$  auch ein Polynom ist, ist holomorph auf  $\mathbb{C}$  ohne die nullstellen von  $q(z)$ .

Betrachtet man eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , bei der Realteil und Imaginärteil von zwei Variablen  $x$  und  $y$  abhängen,  $f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$ , so kann man wieder vergleichen mit dem reellen Analogon:  $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ . Die totale Ableitung von  $F$  ist

$$DF = J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Was ist nun der Zusammenhang zwischen  $J$  und  $f'(z)$ ? Zuerst lässt sich sagen, dass  $J$  eine Matrix und  $f'(z)$  eine komplexe Zahl ist. Sei  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $h = h_1 + ih_2$ . Bildet man die Ableitung von  $f$  wieder auf die Weise, dass man sich zuerst von der reellen Achse, dann von der imaginären Achse annähert, erhält man

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \\
f'(z_0) &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{ih_2} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.
\end{aligned}$$

#### 1.0.1.5 Definition.

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $z$ ,  $x + iy \mapsto u + iv$ . Dann ist die Ableitung  $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} f$ . Definiere also eine Ableitung nach  $z$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Es gilt

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}(u + iv).$$

Es bezeichne  $u_x$  die partielle Ableitung von  $u$  nach  $x$ , analog für die anderen Größen. Führt man die Ableitungen aus, erhält man

$$u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y) = -iu_y + v_y.$$

Für Gleichheit müssen komplexe Zahlen in Real- und Imaginärteil übereinstimmen. Man erhält zwei Gleichungen, die sog. CAUCHY-RIEMANN-DIFFERENTIALGLEICHUNGEN (C.-R.-DGL):

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x.$$

### 1.0.1.6 Satz.

Sei  $f = u + iv$  holomorph in  $z_0$ , dann gilt

- (a)  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z_0) = 0$
- (b)  $f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial z} f(z_0) = 2 \frac{\partial u}{\partial z}$
- (c)  $|f'(z_0)|^2 = \det J(z_0)$

*Proof.* Für (a) offensichtlich, folgt direkt aus der Holomorphie von  $f$ . Für (b) bildet man die Ableitung von  $f$ :

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial z} (u + iv) = \frac{\partial}{\partial z} u + i \frac{\partial}{\partial z} v,$$

wobei man den Imaginärteil ersetzen kann mithilfe der C.-R.-DGL. Schreibe dazu

$$i \frac{\partial}{\partial z} v = \frac{i}{2} (v_x - iv_y) = \frac{1}{2} (iv_x + v_y) = \frac{1}{2} (-iu_y + u_x) = \frac{\partial}{\partial z} u.$$

Also ist

$$\Rightarrow f'(z_0) = 2 \frac{\partial}{\partial z} u.$$

Für (c) schreibt man

$$\det J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 = \left| \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} u \right|^2 = \left| 2 \frac{\partial}{\partial z} u \right|^2 = |f'(z_0)|^2.$$

□

### 1.0.1.7 Satz. Cauchy's Theorem

Sei  $C$  ein stetig differenzierbarer geschlossener Weg in  $\mathbb{C}$  mit Parametrisierung  $z(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  und sei  $f$  holomorph und stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt = 0.$$

*Proof.* Die Parametrisierung ist  $z(t) = x(t) + iy(t)$ . Es bezeichne  $A$  die von  $C$  eingeschlossene Fläche. Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned} \int_a^b (u + iv) \cdot (x'(t) + iy'(t)) dt &= \int_a^b (ux'(t) - vy'(t)) dt + i \int_a^b (uy'(t) + vx'(t)) dt \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt + i \int_a^b \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt \\ &= \iint_A -(v_x + u_y) d(x, y) + i \iint_A (u_x - v_y) d(x, y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt der Satz von Green und im letzten Schritt die C.-R.-DGL angewendet wurden.

□

### 1.0.1.8 Theorem.

Sei  $f = u + iv$  eine komplexe Funktion auf  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Seien  $u, v$  stetig differenzierbar und erfüllen die C.-R.-DGL. Dann ist  $f$  holomorph auf  $\Omega$  und  $f'(z) = \frac{\partial}{\partial z} f = 2 \frac{\partial u}{\partial z}$ .

*Proof.* Es sei  $h = h_1 + ih_2$ . Da  $u, v$  stetig differenzierbar, kann man für diese schreiben

$$\begin{aligned} u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) &= \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h| \psi_1(h) \\ v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) &= \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h| \psi_2(h). \end{aligned}$$



Schreibe also um die Holomorphität zu zeigen

$$\begin{aligned}
 f(z+h) - f(z) &= u(z+h) - u(z) + i(v(z+h) - v(z)) \\
 &= \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h|\psi_1(h) + i \left( \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h|\psi_2(h) \right) \\
 &= \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h|\psi_1(h) + i \left( \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h|\psi_2(h) \right) \\
 &= \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} u \right)}_{=\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f} (h_1 + ih_2) + \underbrace{|h|\psi_1(h) + i|h|\psi_2(h)}_{\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0} \\
 &\Rightarrow f \text{ holomorph.}
 \end{aligned}$$

□

## 1.0.2 Potenzreihen

Wir möchten zeigen, dass die Exponentialfunktion sowie Sinus und Kosinus holomorph sind. Dazu betrachten wir deren Reihenentwicklung, bzw. allgemein Potenzreihen. Zuerst überprüfen wir die harmonische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

auf Konvergenz. Für  $N < \infty$  kann man für die harmonische Reihe schreiben

$$\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}.$$

Wieso geht das? Wir klammern immer jeweils  $(1 - z)$  aus und können schreiben

$$\begin{aligned}
 1 - z^{N+1} &= (1 - z)z^N + 1 - z^N \\
 &= (1 - z)(z^N + z^{N-1}) + 1 - z^{N-1} \\
 &= \dots \\
 &= (1 - z) \sum_{n=0}^N z^n.
 \end{aligned}$$

Lassen wir nun  $N$  gegen unendlich gehen, so konvergiert die Reihe nur für  $|z| < 1$ , da sonst der Term  $z^{N+1}$  divergiert,

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \quad \text{falls } |z| < 1.$$

Für  $|z| > 1$  divergiert die Reihe, man sagt dann, der Konvergenzradius ist 1.

Nun betrachten wir eine allgemeine Potenzreihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

### 1.0.2.1 Theorem.

Für eine Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  existiert ein  $0 \leq R \leq \infty$  mit  $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$  so dass folgendes gilt:

- (a) Falls  $|z| < R$  dann konvergiert die Reihe absolut,
- (b) falls  $|z| > R$  dann divergiert die Reihe,
- (c) falls  $|z| = R$  ist keine Aussage über Konvergenzverhalten möglich.

*Proof.* Für (a): Fixiere ein  $|z| < R$ , dies ist äquivalent zu  $\frac{|z|}{R} < 1$  und damit äquivalent zu  $\exists \epsilon > 0 : |z| \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right) < 1$ . Da nach Voraussetzung gilt, dass  $\limsup |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$ , kann man schreiben

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\epsilon : |a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R} + \epsilon \\ &\Rightarrow |z| |a_n|^{1/n} = r < 1 \\ &\Rightarrow \sum_{n=n_\epsilon}^{\infty} |z|^n |a_n| \leq \sum_{n=n_\epsilon}^{\infty} r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} < \infty. \end{aligned}$$

□

- 1.0.2.2 Theorem.** (a) Die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  definiert eine holomorphe Funktion innerhalb ihres Konvergenzradius,  
 (b) die Ableitung von  $f$  ist auch eine Potenzreihe und zusätzlich gilt  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ,  
 (c)  $f'$  hat den selben Konvergenzradius wie  $f$ .

*Proof.* Zu (c): Wie man durch Multiplizieren mit 1 sieht, gilt

$$\limsup |a_n|^{1/n} = \underbrace{\limsup |n|^{1/n}}_{=1} \limsup |a_n|^{1/n} = \limsup |n a_n|^{1/n}.$$

Also haben  $\sum_n a_n z^n$  und  $\sum_n n a_n z^n$  und somit auch  $\sum_n a_n z^{n-1}$  den selben Konvergenzradius. Zu (a) und (b): Definiere eine Funktion

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Sei nun  $|z_0| < R, \Rightarrow \exists r : |z_0| < r < R$ . Spalte  $f(z)$  auf in einen Teil mit endlichem Summationsindex und Rest:  $f(z) = f_N(z) + u_N(z)$ . Dabei sind die einzelnen Teile wie folgt definiert:  $f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$  und  $u_N(z) = f(z) - f_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$ . Es gilt nun für ein  $h$  mit  $|z_0 + h| < r$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \underbrace{\frac{f_N(z_0 + h) - f_N(z_0)}{h} - f'_N(z_0)}_{=\alpha_1} + \underbrace{f'_N(z_0) - g(z_0)}_{=\alpha_2} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{u_N(z_0 + h) - u_N(z_0)}{h}}_{=\alpha_3}. \end{aligned}$$

Wir müssen nun zeigen, dass die  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$  verschwinden, dann konvergiert der Differenzenquotient gegen die Ableitung und die Potenzreihe ist damit holomorph. Dazu eine Nebenrechnung. Allgemein gilt

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Für  $|b| < |a| < r$  gilt somit

$$|a^n - b^n| \leq |a - b| r^{n-1} n.$$

Damit kann man  $\alpha_3$  abschätzen:

$$\begin{aligned} |\alpha_3| &= \left| \frac{u_N(z_0 + h) - u_N(z_0)}{h} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + h)^N - z_0^N}{h} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}. \end{aligned}$$

Da  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} < \infty$  folgt, dass der Abstand zwischen den Reihengliedern immer kleiner werden muss:  
 $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow |\alpha_3| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .

Da  $\lim_{N \rightarrow \infty} f'_N(z_0) = g(z_0) \Rightarrow |\alpha_2| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ . Das bedeutet, dass  $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall N > N_\epsilon : |\alpha_2| + |\alpha_3| < \epsilon$ .  
 Da die Funktion  $f_N$  ein Polynom ist, ist sie holomorph, d.h.

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f_N(z_0 + h) - f_N(z_0)}{h} - f'_N(z_0) \right| = 0.$$

Damit gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) \right| < |\alpha_2| + |\alpha_3| < \epsilon.$$

Da  $\epsilon$  beliebig war, folgt die Behauptung. □

### 1.0.2.3 Korollar.

Eine Potenzreihe ist unendlich oft komplex differenzierbar innerhalb ihres Konvergenzradius und ihre höheren Ableitungen erhält man durch gliedweises Ableiten.

### 1.0.2.4 Definition.

Eine Funktion  $f(z)$  auf  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt ANALYTISCH in  $z_0$ , wenn eine Potenzreihe  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  (mit Mittelpunkt  $z_0$ ) existiert, sodass  $f \equiv g$  auf einer Umgebung von  $z_0$ . Das bedeutet also, dass das Theorem 1.0.2.2 aussagt: Aus analytisch folgt holomorph. Später werden wir zeigen, dass die Umkehrung auch gilt.

## 1.0.3 Integration entlang Kurven

### 1.0.3.1 Definitionen.

Für Kurven im Komplexen definieren wir Folgendes:

- (a) Eine PARAMETRISIERTE KURVE ist eine Menge  $\gamma \in \mathbb{C}$  zusammen mit einer Parametrisierung  $z : [a, b] \rightarrow \gamma$  (bijektiv), d.h.  $z([a, b]) = \gamma$ . Man bezeichnet die Kurve als GESCHLOSSEN, falls  $z(a) = z(b)$ .
- (b) Die Kurve ist DIFFERENZIERBAR, falls  $z'$  existiert (dies ist im Folgenden immer der Fall). Bei  $t = a, b$  werden  $z'(a), z'(b)$  interpretiert als

$$z'(a) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{z(a+h) - z(a)}{h}, \quad z'(b) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{z(b+h) - z(b)}{h}.$$

- (c) Die Kurve ist STÜCKWEISE DIFFERENZIERBAR, falls  $z$  stetig auf  $[a, b]$  und die Punkte  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  existieren, so dass  $z$  auf  $[a_{n-1}, a_n]$  differenzierbar ist (im Allgemeinen müssen die Rechts-/Linksableitungen nicht mehr übereinstimmen).
- (d)  $z_1 : [a, b] \rightarrow \gamma$  und  $z_2 : [c, d] \rightarrow \gamma$  heißen ÄQUIVALENT, falls eine stetig differenzierbare Bijektion  $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$  (Umparametrisierung) existiert mit  $t'(s) > 0$  (Orientierungserhaltung) und  $z_2(s) = z_1(t(s))$ .
- (e) Die UMKEHRUNG von  $\gamma$  ist  $\gamma^-$  mit Parametrisierung  $z^-(t) = z(b + a - t)$ .
- (f) Die Kurve heißt EINFACH falls sie sich nicht mit sich selbst überschneidet.
- (g) Für eine differenzierbare Kurve  $z : [a, b] \rightarrow \gamma$  und  $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist das INTEGRAL von  $f$  ENTLANG  $\gamma$  definiert durch  $\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt$ .
- (h) Es ist (g) wohldefiniert, denn für eine äquivalente Kurve  $z_2 : [c, d] \rightarrow \gamma$  mit Umparametrisierung  $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$  ist das Integral

$$\int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt = \int_c^d f(z(t(s))) \cdot z'(t(s)) t'(s) ds = \int_c^d f(z_2(s)) \cdot z'_2(s) ds.$$

- (i) Bei stückweise differenzierbaren Kurven gilt  $\int_\gamma f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z(t)) \cdot z'(t) dt$ .

(j) Die LÄNGE einer Kurve ist definiert durch  $l(\gamma) = \int_a^b |z'(t)| dt$ .

### 1.0.3.2 Beispiel.

Ein Kreis mit Radius  $r$  um den Punkt  $z_0$  ist gegeben durch  $\gamma = C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ . Seine Parametrisierung ist

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + re^{it} & t \in [0, 2\pi] & \quad \text{positive Orientierung} \\ z(t) &= z_0 + re^{-it} & t \in [0, 2\pi] & \quad \text{negative Orientierung.} \end{aligned}$$

### 1.0.3.3 Satz.

Für Kurvenintegrale im Komplexen gilt

(a)  $\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz.$

(b)  $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma^-} f(z) dz.$

(c)  $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq |l(\gamma)| \sup_{z \in \gamma} |f(z)|.$

*Proof.* Zu (a): siehe Riemann-Integral, zu (b): siehe Substitutionsregel (Mathe für Physiker II). Zu (c):

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(z(t))| \int_a^b |z'(t)| dt = |l(\gamma)| \sup_{z \in \gamma} |f(z)|.$$

□

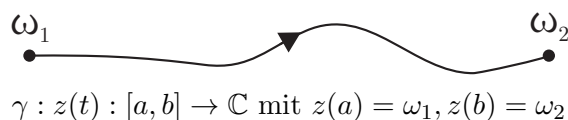
### 1.0.3.4 Definition.

Eine STAMMFUNKTION von  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine holomorphe Funktion  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F' \equiv f$  auf  $\Omega$ .

### 1.0.3.5 Theorem.

Sei  $f$  eine stetige Funktion und habe diese eine Stammfunktion  $F$  in  $\Omega$  und sei  $\gamma$  ein Weg mit Anfangspunkt  $\omega_1$  und Endpunkt  $\omega_2$ , dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\omega_2) - F(\omega_1).$$



*Proof.*

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) \\ &= F(\omega_2) - F(\omega_1). \end{aligned}$$

□

### 1.0.3.6 Korollar.

Wenn  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $\Omega$  und  $f$  stetig mit Stammfunktion  $F$  ist, dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

### 1.0.3.7 Beispiel.

Sei  $C$  die Kurve, die entlang des Einheitskreises verläuft,  $z(t) = e^{it}$ . Dann ist  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = 2\pi i$ .  
 $\Rightarrow \frac{1}{z}$  hat keine Stammfunktion auf  $\mathbb{C}$ .

### 1.0.3.8 Korollar.

Sei  $f$  holomorph in  $\Omega$  mit  $f' = 0$ . Dann ist  $f$  konstant.

*Proof.* Verwende, dass nach Voraussetzung  $f' = 0$  und dass 1.0.3.5 gilt,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} f'(z) dz \\ &= f(z) - f(\omega_0) \\ \Rightarrow f(z) &= f(\omega_0) \\ \Rightarrow f &\text{ konstant.} \end{aligned}$$

□

## 1.0.4 Cauchy-Theorem und Anwendungen

### 1.0.4.1 Theorem. Goursat's Theorem

Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$  und  $T \subset \Omega$ , wobei  $T$  ein Dreieck ist. Falls  $f$  holomorph in  $\Omega$  gilt

$$\int_T f(z) dz = 0.$$

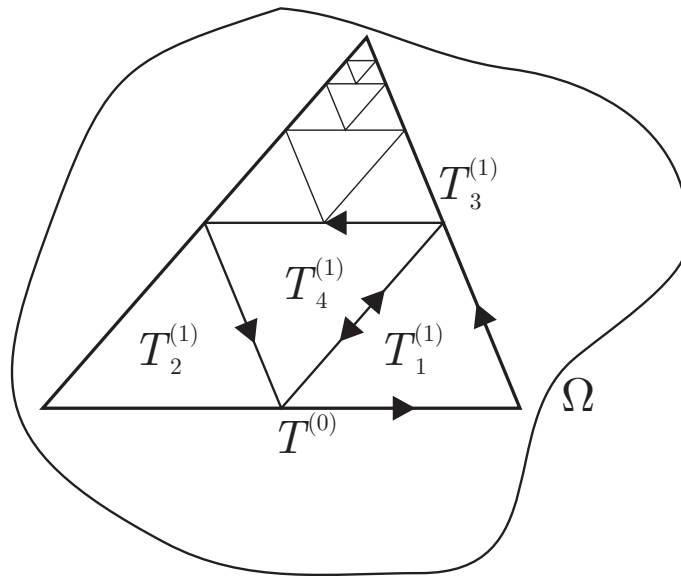


Abbildung 1.2: Ein Dreieck, das durch Verbinden der Seitenmitten in immer kleinere Dreiecke geteilt wird. Wenn man die Kanten entlang fährt heben sich die Beiträge der inneren Dreiecke gegenseitig auf, wie am Beispiel von  $T_1^{(1)}$  und  $T_4^{(1)}$  illustriert.

*Proof.* Vergleiche Abbildung 1.2 für eine Veranschaulichung der Vorgehensweise. Wir verbinden die Seitenmitten des Dreiecks  $T_0$  und erhalten vier neue Dreiecke  $T_k^{(1)}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Für das Wegintegral entlang des Dreiecks gilt dann

$$\int_{T^{(0)}} f(z) dz = \int_{T_1^{(1)}} f(z) dz + \int_{T_2^{(1)}} f(z) dz + \int_{T_3^{(1)}} f(z) dz + \int_{T_4^{(1)}} f(z) dz.$$

Es bezeichne  $i$  den Index des Dreiecks mit dem größten Flächeninhalt. Damit kann man den Betrag des Wegintegrals abschätzen:

$$\left| \int_{T^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{T_i^{(1)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right|.$$

Auf diese Weise erhält man eine Folge von Dreiecken für die gilt  $T^{(0)} \supset T^{(1)} \supset \dots \supset T^{(n)}$ . Dann  $\exists! z_0 \in \mathbb{C} : z_0 \in \bigcap_n T^{(n)} \forall n$ . Da  $f$  holomorph ist, kann man schreiben  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)$ , wobei  $\lim_{z \rightarrow z_0} |\psi(z)| = 0$ . Es bezeichne  $d^{(n)}$  die längste Seite des  $n$ -ten Dreiecks. Da stets die Seiten halbiert wurden gilt  $d^{(n)} = (\frac{1}{2})^n d^{(0)}$ . Analog bezeichne  $p^{(n)}$  den Umfang des  $n$ -ten Dreiecks, auch hier gilt  $p^{(n)} = (\frac{1}{2})^n p^{(0)}$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{T^{(n)}} f(z) dz &= \int_{T^{(n)}} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)) dz \\ &= \int_{T^{(n)}} \psi(z)(z - z_0) dz, \end{aligned}$$

wobei das Integral über die Terme  $f(z_0)$  und  $f'(z_0)(z - z_0)$  verschwindet, da beide eine bekannte Stammfunktion haben und der Weg geschlossen ist. Nun kann man weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \int_{T^{(0)}} f(z) dz \right| &\leq \left| 4^n \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right| \\ &= 4^n \left| \int_{T^{(n)}} \psi(z)(z - z_0) dz \right| \\ &\leq 4^n \sup_{z \in T^{(n)}} (|\psi(z)| |z - z_0|) p^{(n)} \\ &\leq 4^n \sup_{z \in T^{(n)}} |\psi(z)| d^{(n)} p^{(n)} \\ &= \sup_{z \in T^{(n)}} |\psi(z)| d^{(0)} p^{(0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Rightarrow \int_T f(z) dz = 0. \end{aligned}$$

□

#### 1.0.4.2 Korollar.

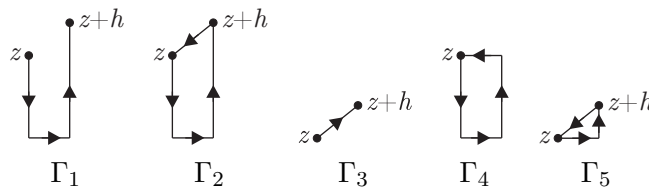
Analog zu 1.0.4.1 gilt  $\int_R f(z) dz = 0$ , wenn  $R$  ein Rechteck ist.

*Proof.* Zerlege das Rechteck in zwei Dreiecke und wende auf diese 1.0.4.1 an:  $\int_R f(z) dz = \int_{T_1} f(z) dz + \int_{T_2} f(z) dz = 0$ . □

#### 1.0.4.3 Theorem.

Eine holomorphe Funktion in einer offenen Kreisscheibe hat eine Stammfunktion in dieser.

*Proof.* Vergleiche Abbildung 1.3 für eine Veranschaulichung der Vorgehensweise. Es bezeichne  $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\omega) d\omega$ . Wir bilden nun die Differenz von  $F(z+h)$  und  $F(z)$ ,  $h \in \mathbb{C}$ , um später den Differenzenquotienten bilden zu können und den Ansatz rechtfertigen zu können. Die im Folgenden verwendeten Wege sind



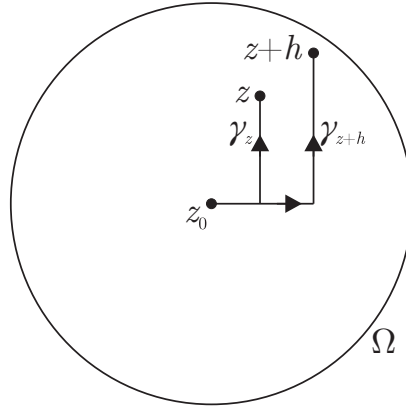


Abbildung 1.3: Eine offene Kreisscheibe  $\Omega$ , die mit rechtwinkligen Wegen durchlaufen wird. Dabei ist  $(z + h) \in \Omega$ .

$$\begin{aligned}
 F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma_{z+h}} f(\omega) d\omega - \int_{\gamma_z} f(\omega) d\omega \\
 &= \int_{\gamma_{z+h}} f(\omega) d\omega + \int_{-\gamma_z} f(\omega) d\omega \\
 &= \int_{\Gamma_1} f(\omega) d\omega \\
 &= \int_{\Gamma_2} f(\omega) d\omega + \int_{\Gamma_3} f(\omega) d\omega \\
 &= \int_{\Gamma_4} f(\omega) d\omega + \int_{\Gamma_5} f(\omega) d\omega + \int_{\Gamma_3} f(\omega) d\omega.
 \end{aligned}$$

Wie oben schon bewiesen wurde, verschwinden die Integrale über die Wege  $\Gamma_4$  und  $\Gamma_5$ , da es sich dabei um ein Rechteck und ein Dreieck handelt. Wir entwickeln nun  $f(\omega)$  im Punkt  $z$ :

$$f(\omega) = f(z) + \underbrace{f'(z)(z - \omega) + \phi}_{:=\psi(\omega)}.$$

Dabei geht  $\psi(\omega)$  schneller als linear gegen Null für  $h \rightarrow 0$ . Schreibe damit

$$\begin{aligned}
 F(z+h) - F(z) &= \int_{\Gamma_3} f(\omega) d\omega \\
 &= \int_{\Gamma_3} (f(z) + \psi(\omega)) d\omega.
 \end{aligned}$$

Für den ersten Term im Integral kann man schreiben  $\int_{\Gamma_3} f(z) d\omega = f(z) \int_{\Gamma_3} 1 d\omega = f(z)h$ , was schnell klar wird wenn man eine Parametrisierung  $z(t) = z + ht$  mit  $t \in [0, 1]$  verwendet. Es verbleibt das Integral über  $\psi(\omega)$ , welches betragsmäßig abgeschätzt werden kann:

$$\left| \frac{1}{h} \int_{\Gamma_3} \psi(\omega) d\omega \right| \leq \sup_{\omega \in \Gamma_3} |\psi(\omega)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Also kann man  $F(z+h) - F(z)$  durch  $h$  dividieren, den Limes  $h \rightarrow 0$  bilden und erhält  $f(z)$ .  $\Rightarrow F'(z) = f(z)$ .  $\square$

#### 1.0.4.4 Korollar.

Sei  $f$  holomorph in  $\Omega$ ,  $C$  ein Kreis mit  $C \subset \Omega$ . Dann gilt  $\int_C f(z) dz = 0$ .

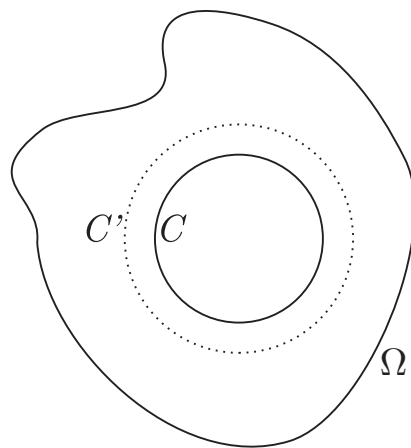
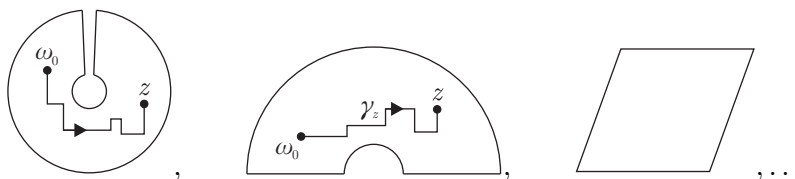


Abbildung 1.4: Eine Kreislinie  $C$ , die vollständig umschlossen wird von einem Kreis mit größerem Radius  $C'$ .

*Proof.* Da  $\Omega$  offen ist, gibt es einen Kreis  $C'$  mit  $C \subset D'$  wobei  $D'$  die zu  $C'$  gehörige Kreisscheibe ist (vgl. Abbildung 1.4). Nach Theorem 1.0.4.3 existiert nun  $F$  mit  $F' = f$  in  $D'$  und damit  $\int_C f(z)dz = 0$ .  $\square$

#### 1.0.4.5 Bemerkung.

Den Beweis für Kreise kann man leicht auf sog. „toy contours“ erweitern. Dies sind z. B.



Mittels obiger Beweisstrategie, nämlich der Definition eines Weges  $\gamma_z$  mittels horizontaler und vertikaler Linien, zeigt man, dass es Stammfunktionen in diesen Gebieten gibt.

#### 1.0.4.6 Beispiel.

Wir zeigen nun wie man mithilfe von komplexer Analysis  $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$  leicht ausrechnen kann. Zuerst einmal folgt mithilfe der eulerschen Identität  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , dass der Integrand geschrieben werden kann als  $\frac{1-\cos x}{x^2} = \operatorname{Re} \frac{1-e^{ix}}{x^2}$ . Damit folgt für das Integral unter Ausnutzung der Symmetrie des Integranden

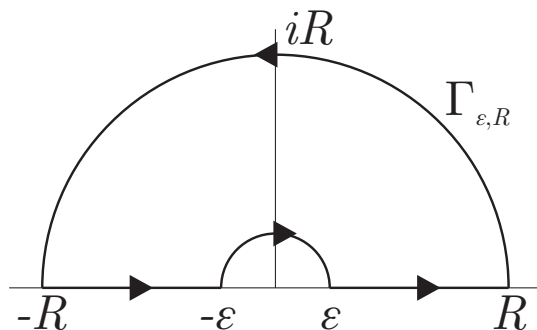


Abbildung 1.5: Ein Weg durch die komplexe Ebene, der die Null nicht mit einschließt.

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz,$$



wobei  $f(z) := \frac{1}{2} \frac{1-e^{iz}}{z^2}$  holomorph in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Das bedeutet das Integral über einen geschlossenen Weg verschwindet. Der von uns gewählte Weg ist in Abbildung 1.5 dargestellt. Da dieser Weg die Null ausspart gilt

$$0 = \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z) dz = \int_{-R}^{-\epsilon} f + \int_{\epsilon}^R f + \int_{C_{\epsilon}} f + \int_{C_R} f.$$

Daraus folgt dann

$$\Rightarrow \int_{-R}^{-\epsilon} f + \int_{\epsilon}^R f = - \int_{C_{\epsilon}} f - \int_{C_R} f.$$

Wir betrachten nun den Betrag des Integrals über den großen Kreisbogen  $C_R$ , die Parametrisierung für diesen lautet  $z(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Wir schätzen ab mit

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{1-e^{iz(t)}}{R^2 e^{2it}} i R e^{it} dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\pi} \frac{2}{R^2} R dt \right| \\ &= \frac{2\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Das Integral über den großen Kreisbogen verschwindet also für große  $R$ . Für das Integral des kleinen Kreisbogens drehen wir zunächst die Durchlaufrichtung um,

$$- \int_{C_{\epsilon}} f = \int_{C_{\epsilon}^{-}} f$$

und fügen eine Null ein:

$$\begin{aligned} \int_{C_{\epsilon}^{-}} f &= \frac{1}{2} \int_{C_{\epsilon}^{-}} \frac{1-iz + (iz - e^{iz})}{z^2} dz \\ &= -\frac{i}{2} \int_{C_{\epsilon}^{-}} \frac{1}{z} dz + \frac{1}{2} \int_{C_{\epsilon}^{-}} \underbrace{\frac{1+iz - e^{iz}}{z^2}}_{=: E(z)} dz \\ &= -\frac{i}{2} \pi i + \frac{1}{2} \int_{C_{\epsilon}^{-}} E(z) dz \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_{C_{\epsilon}^{-}} E(z) dz. \end{aligned}$$

Da  $E(z)$  auf dem Einheitskreis beschränkt ist, folgt

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2} \int_{C_{\epsilon}^{-}} E(z) dz \right| \leq \frac{1}{2} \sup_{z \in \mathbb{D}} |E(z)| \pi \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Damit ist der Wert des Integrals  $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ .

#### 1.0.4.7 Theorem. Cauchy's Integralformel

Sei  $f$  holomorph in  $\Omega$ ,  $C$  ein Kreis mit  $D \subset \Omega$  und  $\partial D = C$ . Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

*Proof.* Es sei  $F := \frac{f(\xi)}{\xi - z}$  holomorph in  $\mathbb{C} \setminus L = \Omega$  (vgl. Abb. 1.6). Dann verschwindet das Integral über einen geschlossenen Weg,  $\int_{\Gamma_{\epsilon,\delta}} F(\xi) d\xi = 0$ . Für  $\delta \rightarrow 0$  gelte  $\Gamma_{\epsilon,\delta} \rightarrow \Gamma_{\epsilon}$ . Nun wird:

$$\int_{\Gamma_{\epsilon}} F(\xi) d\xi = 0 = \int_C F(\xi) d\xi + \int_{-C_{\epsilon}} F(\xi) d\xi = \int_C F(\xi) d\xi - \int_{C_{\epsilon}} F(\xi) d\xi$$

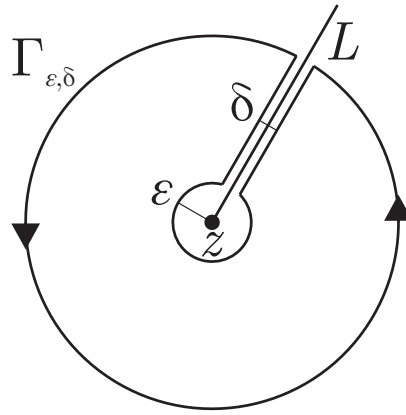


Abbildung 1.6:  $F$  ist auf der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus L$  holomorph.

Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} F(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \underbrace{\left( \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} + \frac{f(z)}{\xi - z} \right)}_{\xrightarrow{(*)} 0} d\xi \\ &= \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \frac{d\xi}{\xi - z} \\ &= \frac{f(z)}{2\pi i} 2\pi i = f(z) \end{aligned}$$

Dabei gilt  $(*)$  im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 0$ , denn:

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\xi \in D} \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| 2\pi\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

□

#### 1.0.4.8 Korollar.

Sei  $f$  holomorph auf  $\Omega$ . Dann hat  $f$  unendlich viele (komplexe) Ableitungen in  $\Omega$  und es gilt für einen geschlossenen Weg  $C$  um  $z \in \Omega$ :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

*Proof.* Führe vollständige Induktion über  $n$ :

1. Für  $n = 0$  gilt nach 1.0.4.7

$$f^{(0)}(z) = f(z) = \frac{0!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^1} d\xi$$

2. Für den Schritt  $n \mapsto n + 1$  ergibt sich aufgrund der Kompaktheit von  $C$  (Ableitung und Integration

vertauschen):

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz} f^{(n)}(z) = \frac{d}{dz} \left( \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right) \\
 &= \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{d}{dz} \left( \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \right) d\xi \\
 &= -(-1) \frac{n!(n+1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi \\
 &= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi
 \end{aligned}$$

□

#### 1.0.4.9 Korollar.

Sei  $f$  holomorph auf  $\Omega \subset \mathbb{C}$  und die Kreisscheibe  $\bar{D}$  mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $R$  komplett in  $\Omega$ . Bezeichne  $C = \partial D$  den Rand von  $D$ . Dann gilt mit der Definition  $\|f\|_C := \sup_{z \in C} |f(z)|$ :

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \|f\|_C$$

*Proof.* Sei die Kreislinie um  $z_0$  parametrisiert durch  $\xi(t) = z_0 + Re^{it}$  für  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$\begin{aligned}
 |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{(z_0 + Re^{it} - z_0)^{n+1}} \xi'(t) dt \right| \\
 &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}} iRe^{it} dt \right| \\
 &\leq \frac{n!}{2\pi} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + Re^{it})| \frac{1}{R^n} \int_0^{2\pi} dt \\
 &= \frac{n!}{R^n} \|f\|_C
 \end{aligned}$$

□

#### 1.0.4.10 Theorem.

Sei  $f$  holomorph auf  $\Omega$  und  $D$  eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $z_0$  und  $\bar{D} \subset \Omega$ . Dann lässt sich  $f$  in eine Potenzreihe um  $z_0$  entwickeln, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle  $z \in D$  und mit  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

*Proof.* Bezeichne  $C = \partial D$  den Rand von  $D$ . Da  $C$  kompakt ist, vertauschen Grenzwertbildung und Integral. Es folgt unter Verwendung der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\xi \\
 \Rightarrow a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\
 &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)
 \end{aligned}$$

□

#### 1.0.4.11 Definition.

Eine Funktion  $f$  heißt ENTIRE oder GANZ, wenn sie auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph ist.

#### 1.0.4.12 Korollar. Liouville's Theorem

Wenn  $f$  entire und beschränkt ist, so ist  $f$  auch konstant.

*Proof.* Seien  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $R \in [0, \infty)$  beliebig. Sei  $R$  der Radius eines Kreises um  $z_0$ , dessen Rand mit  $C$  bezeichnet werde. Sei wiederum  $\|f\|_C := \sup_{z \in C} |f(z)| \leq M \in \mathbb{R}$  (da  $f$  beschränkt). Zeige nun, dass  $f'(z_0) = 0$  gelten muss:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\|f\|_C}{R} \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Da  $R$  beliebig war und deshalb  $|f'(z_0)| = 0$ , muss  $f$  konstant sein. □

#### 1.0.4.13 Korollar.

Jedes nicht-konstante Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

mit komplexen Koeffizienten  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

*Proof.* Angenommen,  $p(z)$  hat keine Nullstelle, dann ist  $1/p(z)$  beschränkt. Schreibe dann:

$$\frac{p(z)}{z^n} = a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}}_{\xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0}$$

Also gilt beispielsweise:

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} \right| \geq \frac{|a_n|}{2} \quad \forall |z| \geq R \text{ mit } R \text{ groß genug}$$

Das bedeutet aber:

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq \frac{1}{2} |z|^n |a_n| \quad \text{für } |z| \geq R \\ \Leftrightarrow \frac{1}{|p(z)|} &\leq \frac{2}{|a_n|} \frac{1}{|z|^n} \leq \frac{2}{|a_n|} \frac{1}{R^n} \quad \text{für } |z| \geq R \\ &\Leftrightarrow 1/p(z) \text{ beschränkt auf } \mathbb{C} \Rightarrow p(z) = \text{const.} \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch, weswegen  $p$  mindestens eine Nullstelle haben muss. □

#### 1.0.4.14 Korollar. Hauptsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad  $n \geq 1$  hat exakt  $n$  Nullstellen in  $\mathbb{C}$ , also gibt es  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), sodass

$$p(z) = a_n (z - \omega_1)(z - \omega_2) \cdot \dots \cdot (z - \omega_n)$$

*Proof.*  $p$  hat mindestens eine Nullstelle  $\omega_1$ , also  $p(\omega_1) = 0$ . Damit kann man dann schreiben:

$$\begin{aligned} p(z - \omega_1 + \omega_1) &= a_n (z - \omega_1 + \omega_1)^n + \dots + a_0 \\ &= b_n (z - \omega_1)^n + b_{n-1} (z - \omega_1)^{n-1} + \dots + b_1 (z - \omega_1) + b_0 \end{aligned}$$

Da aber  $p(\omega_1) = 0$  folgt direkt  $b_0 = 0$  und damit

$$p(z) = (z - \omega_1)Q(z),$$

wobei der Grad von  $Q$  genau  $n - 1$  ist. Nun hat  $Q$  aber mindestens eine Nullstelle usw. (induktiv findet man also, dass  $p$  genau  $n$  Nullstellen hat) □

### 1.0.4.15 Theorem.

Sei  $f$  eine holomorphe Funktion auf  $\Omega$ , die auf einer Menge  $M \subset \Omega$  mit Häufungspunkt verschwindet. Dann gilt  $f = 0$  auf ganz  $\Omega$ .

*Proof.* Wähle eine konvergente Folge  $(\omega_n)_{n=1}^\infty \subset \Omega$  mit  $(\omega_n) \rightarrow \omega$ , sodass  $f(\omega_n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . (Diese existiert nach BOLZANO-WEIERSTRASS und den Voraussetzungen.) Da  $f$  holomorph in  $\Omega$ , existiert eine Kreisscheibe  $D$ , sodass für alle  $z \in D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \omega)^n.$$

Angenommen,  $f(z) \neq 0$ , so existiert ein  $n \in \mathbb{N}_0$ , sodass  $a_n \neq 0$ . Da  $f$  stetig ist, folgt:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\omega_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_n)\right) = f(\omega) \Rightarrow a_0 = 0$$

Daher folgt

$$f(z) = a_m (z - \omega)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+m}}{a_m} (z - \omega)^k = (z - \omega)^m (1 + g(z - \omega)),$$

wobei  $m$  kleinstmöglich, sodass  $a_m \neq 0$  und  $g(z - \omega) \xrightarrow{z \rightarrow \omega} 0$  holomorph ist. Da nun aber  $(\omega_n)_{n=1}^\infty \rightarrow \omega$ , gibt es ein  $k_0$ , sodass für alle  $k \geq k_0$

$$1 + \underbrace{g(\omega_k - \omega)}_{\rightarrow 0} \neq 0.$$

Also ist

$$0 = f(\omega_k) = a_n \underbrace{(\omega_k - \omega)^m}_{\neq 0} \underbrace{(1 + g(\omega_k - \omega))^m}_{\neq 0}$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da ein  $a_n \neq 0$  existiert, also gilt  $f(z) = 0$  für alle  $z \in D$ . Dehne diesen Geltungsbereich nun induktiv aus (dies ist möglich, da  $\Omega$  ein Gebiet und daher auch wegzusammenhängend ist, vgl. Abb.1.7).  $\square$

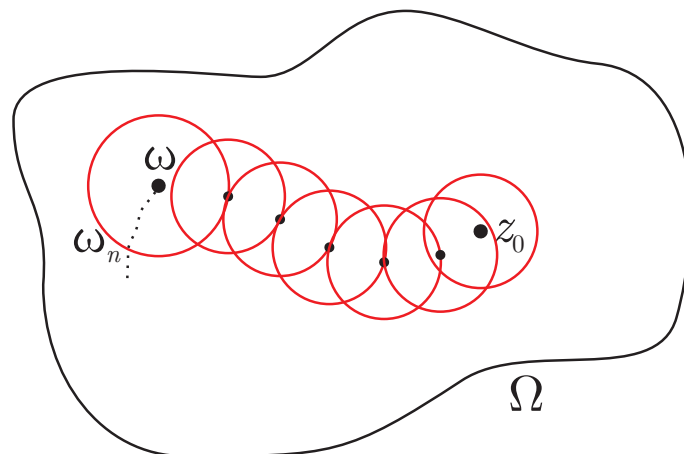


Abbildung 1.7: Man findet induktiv Kreise, deren Mittelpunkte auf einem Weg von  $\omega$  zu einem beliebigen  $z_0 \in \Omega$  liegen.

### 1.0.4.16 Korollar.

Seien  $f, g$  holomorph auf  $\Omega$  und  $f = g$  auf einer Menge mit Häufungspunkt. Dann gilt  $f = g$  auf ganz  $\Omega$ .

*Proof.* Folgt wegen  $h := f - g$  (holomorph) sofort.  $\square$

#### 1.0.4.17 Theorem. Morera

Sei  $f$  auf einer offenen Kreisscheibe  $D$  stetig, sodass für alle Dreiecke  $T \subset D$  das Integral über den Rand verschwindet, also  $\int_T f = 0$ . Dann ist  $f$  holomorph in  $D$ .

*Proof.* Wegen  $\int_T f = 0$  existiert eine Stammfunktion  $F$  mit  $F'(z) = f(z)$ . Daher ist  $f$  unendlich oft differenzierbar und holomorph.  $\square$

#### 1.0.4.18 Theorem.

Sei  $(f_n(z))_{n=1}^\infty$  eine Folge holomorpher Funktionen, die auf jeder kompakten Teilmenge  $\Omega$  GLEICHMÄSSIG gegen  $f(z)$  konvergiert. Dann ist  $f(z)$  holomorph in  $\Omega$ .

Merke: Der gleichmäßige Limes holomorpher Funktionen ist holomorph. (gilt im Reellen NICHT!)

*Proof.* Zeige, dass das Integral über alle Dreiecke verschwindet:

Da  $f_n$  holomorph, gilt

$$\int_T f_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wegen der Kompaktheit von  $T$  und da  $(f_n) \rightarrow f$  gleichmäßig vertauschen Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  und die Integration, also

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T f_k = \int_T f$$

Da der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen wieder stetig ist, gilt der Satz von Morera (vgl. Abschnitt 1.0.4.17), also ist  $f$  holomorph in  $\Omega$ .  $\square$

#### 1.0.4.19 Korollar.

Sei  $f$  stetig auf einem Kreis  $C = \partial D$ . Dann ist

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

holomorph in  $D$ .

*Proof.*

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \frac{f(\xi_j)}{\xi_j - z} (\xi_j - \xi_{j-1})$$

ist holomorph und konvergiert gleichmäßig gegen  $g$ .  $\square$

Eine Anwendung des Satzes von Morera ist das Schwarz'sche Spiegelungsprinzip. Wir haben gesehen, dass holomorphe Funktionen sehr rigide Elemente sind. Zum Beispiel verschwinden diese schon identisch wenn sie nur auf einer beliebig kleinen offenen Menge Null sind. Es stellt sich hingegen heraus, dass holomorphe Funktionen fortgesetzt werden können. Dazu benötigen wir eine Menge  $\Omega$ , die symmetrisch bezüglich der reellen Achse ist. Das heisst

$$\Omega = \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-,$$

wobei  $I$  der Teil auf der reellen Achse ist. Wir nehmen dabei an, dass  $\Omega^-$  durch Spiegelung an der reellen Achse gewonnen werden kann.

#### 1.0.4.20 Theorem.

Falls  $f^+$  und  $f^-$  holomorphe Funktionen in  $\Omega^+$  beziehungsweise  $\Omega^-$  sind und sich stetig auf  $I$  fortsetzen lassen und dort übereinstimmen. Dann ist die kombinierte Funktion  $f(z)$  holomorph in  $\Omega$ .

*Proof.* Der Beweis verwendet den Satz von Morera. Es genügt zu zeigen, dass für alle Dreiecke  $T$  in  $\Omega$   $\int_\Omega f(z) dz = 0$  ist. Nimm nun ein beliebiges Dreieck  $T$ . Wenn eine Seite auf der reellen Achse liegt, verschieb es um  $\varepsilon$  nach innen und verwende die Stetigkeit von  $f$  um zu zeigen, dass das Integral verschwindet. Falls die reelle Achse das Dreieck schneidet, teile das Dreieck in kleinere Dreiecke, sodass eine Seite auf  $I$  liegt und wende obiges Argument nochmals an.  $\square$

Wir können nun erläutern nach welchem Prinzip, die Funktion fortgesetzt wird.

#### 1.0.4.21 Theorem.

Angenommen  $f^+(z)$  ist holomorphe Funktion in  $\Omega^+$  die sich stetig nach  $I$ , Teilmenge der reellen Achse, fortsetzen lässt sodass  $f$  auf  $I$  reell ist. Dann existiert eine holomorphe Funktion  $F(z)$  auf ganz  $\Omega$ , mit  $F = f$  auf  $\Omega^+$ .

*Proof.* Man definiert  $F$  in  $\Omega^-$  als

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Seien  $z, z_0 \in \Omega^-$ , dann sind  $\bar{z}_0 \bar{z} \in \Omega^+$ . Da  $f$  in  $\bar{z}_0$  holomorph ist, gilt

$$f(\bar{z}) = \sum_n a_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n.$$

Also gilt

$$F(z) = \sum_n \bar{a}_n (z - z_0)^n.$$

Somit ist  $F(z)$  holomorph in  $\Omega^-$ . Da  $f$  reell ist, gilt  $f(x) = \overline{f(x)}$  auf  $I$ . Somit lässt sich  $F$  auf  $I$  stetig fortsetzen und wir können das letzte Theorem anwenden und haben das Theorem bewiesen.  $\square$

### 1.0.5 Meromorphe Funktionen

#### 1.0.5.1 Definition.

Eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt MEROMORPH, wenn sie holomorph bis auf endlich (abzählbar) viele Pole ist.

Wir werden sehen, dass dann für das Integral entlang einer geschlossenen Kurve

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^N \text{res}_{z_i} f,$$

gilt, wobei  $\text{res}_{z_i}$  das Residuum von  $f$  an der Polstelle  $z_i$  bezeichnet.

#### 1.0.5.2 Definitionen.

Da die Begriffe RESIDUUM und POLSTELLE bisher noch unbekannt sind, beschäftigen wir uns zunächst mit diesen.

- (a) Punktsingularität:  $z_0$  ist Punktsingularität von  $f$ , wenn  $f$  in einer Umgebung von  $z_0$  definiert ist aber nicht in  $z_0$ .
- (b) Nullstelle:  $z_0$  ist Nullstelle, wenn  $f(z_0) = 0$ .
- (c) „deleted neighborhood“ (punktierte Umgebung) um  $z_0$ :  $D_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ .
- (d) Polstelle:  $f$  besitzt eine Polstelle bei  $z_0$ , wenn  $\frac{1}{f}$  mit  $\frac{1}{f}(z_0) := 0$  holomorph ist in  $D_r(z_0)$  mit geeignetem  $r$ .

#### 1.0.5.3 Beispiel.

Nun einige Beispiele zu den obigen Definitionen:

- (a)  $f(z) = z$  für  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  hat eine Punktsingularität in 0 aber mit  $f(0) := 0$  ist  $f$  holomorph.
- (b)  $g(z) = \frac{1}{z}$  ist definiert auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  und es ist  $|g(z)| \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$ . Definiere analog zu (a)  $f(z) = \frac{1}{g(z)}$  mit  $f(0) := 0$ ,  $f$  ist dann holomorph.
- (c)  $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$  verhält sich unterschiedlich in einer Umgebung von Null, je nachdem aus welcher Richtung man kommt:

$$x \searrow 0 : f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0$$

$$x \nearrow 0 : f(x) = e^{\frac{1}{|x|}} \rightarrow \infty$$

$$y \rightarrow 0 : f(iy) = e^{-\frac{1}{iy}} = e^{\frac{i}{y}} \text{ oszilliert.}$$

Die Funktion  $e^{-\frac{1}{z}}$  bildet jede Umgebung von Null,  $U_\epsilon(0)$ , dicht in ganz  $\mathbb{C}$  ab.

#### 1.0.5.4 Bemerkung.

Nullstellen einer holomorphen Funktion sind isoliert. Wenn  $f(z_0) = 0$ , dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $z_0$ , sodass  $f \neq 0$  in  $U \setminus \{z_0\}$ .

#### 1.0.5.5 Theorem.

Sei  $f$  holomorph in  $\Omega$  und habe  $f$  eine Nullstelle  $z_0 \in \Omega$ ,  $f \neq 0$  in  $\Omega$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $z_0$  und eine nicht verschwindende Funktion  $g$  auf  $U$  sowie eine eindeutige Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , sodass

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

auf  $U$ .  $z_0$  ist Nullstelle  $n$ -ter Ordnung.

*Proof.* Es ist nach Voraussetzung  $f(z_0) = 0$ .  $f$  lässt sich in  $D_{z_0}$  in eine Potenzreihe entwickeln,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ für } z \in D_{z_0}.$$

Es gibt eine Umgebung  $U$  von  $z_0$ , sodass  $f(z) \neq 0$  in  $U \setminus \{z_0\}$ . Da  $f(z_0) = 0$  ist der erste Koeffizient der Reihenentwicklung  $a_0 = 0$ .  $n$  sei kleinste Zahl, sodass  $a_n \neq 0$ . Dann gilt

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k =: (z - z_0)^n g(z),$$

wobei  $g(z) \neq 0$  nach Voraussetzung.  $n$  bezeichnet die Ordnung der Nullstelle, Nullstellen 1. Ordnung nennt man einfach. □

#### 1.0.5.6 Theorem.

Wenn  $f$  eine Polstelle bei  $z_0$  hat, dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $z_0$  und eine nicht verschwindende holomorphe Funktion  $h(z)$  sowie eine eindeutige Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , sodass

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z) \text{ für } z \in U.$$

$n$  ist die Ordnung der Polstelle.

*Proof.* Da  $z_0$  Polstelle von  $f$  ist gilt:  $z_0$  ist Nullstelle von  $\frac{1}{f}$  und  $\frac{1}{f}$  ist holomorph in  $U$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{f}(z) &= (z - z_0)^n g(z) \text{ mit } g(z) \neq 0 \text{ in } U \\ \Rightarrow f(z) &= (z - z_0)^{-n} \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^{-n} h(z). \end{aligned}$$

□

#### 1.0.5.7 Theorem.

Wenn  $f$  eine Polstelle bei  $z_0$  hat, dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $z_0$ , sodass

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n+1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + G(z)$$

mit  $G(z)$  holomorph in  $U$ . Dabei nennt man  $a_{-1}$  das Residuum von  $f$  an der Stelle  $z_0$ :  $a_{-1} := \text{res}_{z_0} f$ .

*Proof.* Da  $z_0$  Polstelle von  $f$  ist, hat  $\frac{1}{f}$  eine Nullstelle bei  $z_0$  und man kann für  $\frac{1}{f}$  schreiben

$$\Rightarrow \frac{1}{f}(z) = (z - z_0)^n g(z)$$



mit  $g(z) \neq 0$  in einer Umgebung von  $z_0$ . Jetzt kann man invertieren und erhält

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} h(z)$$

mit  $h(z)$  holomorph in einer Umgebung von  $z_0$ . Da  $h(z)$  holomorph in einer Umgebung von  $z_0$ , kann man  $h(z)$  in eine Potenzreihe entwickeln und erhält

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^n} (A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \dots) \\ &= \frac{A_0}{(z - z_0)^n} + \frac{A_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{(z - z_0)} + G(z), \end{aligned}$$

mit  $G(z)$  holomorph in einer Umgebung von  $z_0$ . Nun kann man sich noch andere Koeffizienten definieren,  $a_{-n} := A_0, a_{-1} := A_{n-1}$  und erhält was zu beweisen war.  $\square$

Die Summe  $P(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)}$  nennt man Hauptteil,  $a_{-1}$  nennt man Residuum. Weshalb man  $a_{-1}$  Residuum nennt wird klar, betrachtet man ein Wegintegral entlang eines Kreises um  $z_0$ . Dessen Parametrisierung lautet  $C_{z_0} : z(t) = z_0 + \delta e^{it}$  mit  $\delta > 0$ . Das Integral ist dann

$$\int_{C_{z_0}} f(z) dz = \int_{C_{z_0}} P(z) dz + \underbrace{\int_{C_{z_0}} G(z) dz}_{=0},$$

wobei das Integral über  $G(z)$  verschwindet, da die Funktion holomorph in einer Umgebung von  $z_0$  ist. Da  $P(z)$  eine Summe ist, kann man gliedweise integrieren. Wir führen hier die Integration für den  $n$ -ten Term durch, daran kann man alle übrigen ablesen:

$$\begin{aligned} \int_{C_{z_0}} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} dz &= a_{-n} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\delta e^{it})^n} i \delta e^{it} dt \\ &= i a_{-n} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it(1-n)}}{\delta^{n-1}} dt \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 2\pi i a_{-1} & n = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Also verschwinden alle Terme der Summe  $P(z)$  bis auf den mit  $a_{-1}$ :

$$\int_{C_{z_0}} f(z) dz = \int_{C_{z_0}} P(z) dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Wenn  $z_0$  nun ein Pol 1. Ordnung ist, so ist  $n = 1$  und man kann schreiben

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + G(z) \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

### 1.0.5.8 Theorem.

Wenn  $f$  bei  $z_0$  einen Pol  $n$ -ter Ordnung hat, dann gilt

$$a_{-1} = \operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z - z_0)^n f(z)).$$

*Proof.* Multipliziert man  $f$  mit  $(z - z_0)^n$  so ergibt sich

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + (z - z_0) a_{-n+1} + \dots + a_{-1} (z - z_0)^{n-1} + (z - z_0)^n G(z).$$

Leitet man diesen Term nun gliedweise  $(n-1)$ -mal ab, so erhält man

$$\left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z - z_0)^n f(z)) = (n-1)! a_{-1} + \underbrace{\left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z - z_0)^n G(z))}_{\rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow z_0}$$

und daraus folgt die Behauptung.  $\square$

### 1.0.5.9 Theorem. Residuensatz

Sei  $f$  holomorph in  $\Omega$  bis auf eine Polstelle  $z_0 \in D$ ,  $\partial D = C \subset \Omega$  sei Kreis in  $\Omega$ . Dann gilt

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f.$$

*Proof.*  $f$  hat eine Polstelle in  $z_0$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $z_0$ , sodass  $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} h(z)$  mit  $h(z)$  holomorph. Entwickle dann  $h(z)$  in eine Potenzreihe,

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + G(z) \quad \forall z \in U.$$

Nun legen wir einen „toy-contour“-Weg entlang  $C$  und um  $z_0$  (ähnlich Abbildung 1.6). Da dieser geschlossen ist und über eine holomorphe Funktion geht sowie keine Singularitäten beinhaltet gilt

$$\int_{\Gamma_{\delta,\epsilon}} f(z) dz = 0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\delta,\epsilon}} f(z) dz = \int_C f(z) dz - \int_{C_\epsilon} f(z) dz.$$

Also folgt

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = \int_{C_\epsilon} f(z) dz = \int_{C_\epsilon} \left[ \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + G(z) \right] dz = 2\pi i a_{-1}.$$

□

### 1.0.5.10 Korollar.

Sei  $f$  holomorph in  $\Omega$  bis auf Pole  $\{z_1, \dots, z_N\} \subset D$  und  $D$  Kreisscheibe in  $\Omega$  mit  $\partial D = C \subset \Omega$ . Dann gilt

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{l=1}^N \operatorname{res}_{z_l} f.$$

*Proof.* Der Beweis erfolgt analog zu 1.0.5.9, nur mit  $N$ -fachem Schlüsseloch-Weg:

$$\int_C f(z) dz = \sum_{l=1}^N \int_{C_\epsilon^l} f(z) dz = 2\pi i \sum_{l=1}^N \operatorname{res}_{z_l} f.$$

□

### 1.0.5.11 Korollar.

Sei  $f$  holomorph in  $\Omega$  bis auf Pole  $z_1, \dots, z_N$  innerhalb des „toy-contour“-Wegs  $\gamma$ ,  $\gamma \subset \Omega$ . Dann gilt

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{l=1}^N \operatorname{res}_{z_l} f.$$

### 1.0.5.12 Beispiel.

Wir berechnen das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$  mithilfe des Residuensatzes. Zuerst untersuchen wir  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  auf Polstellen in der komplexen Ebene. Man findet sofort  $z = \pm i$ . Diese Pole sind beide von erster Ordnung und man kann daher für das Residuum schreiben

$$\operatorname{res}_{z_l} f = \lim_{z \rightarrow z_l} (z - z_l) f(z).$$

Wir legen uns nun einen Weg durch die komplexe Ebene, der nur einen Pol mit einschließt: Wir gehen von Null zu  $R$  auf der reellen Achse, von dort aus im Halbkreis über die obere Halbebene nach  $-R$  und wieder zurück zur Null. Bezeichne  $\Gamma_{R_1}$  diesen Weg, vgl. Abbildung 1.8. Das Integral über diesen Weg ist dann

$$\int_{\Gamma_{R_1}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_i f,$$

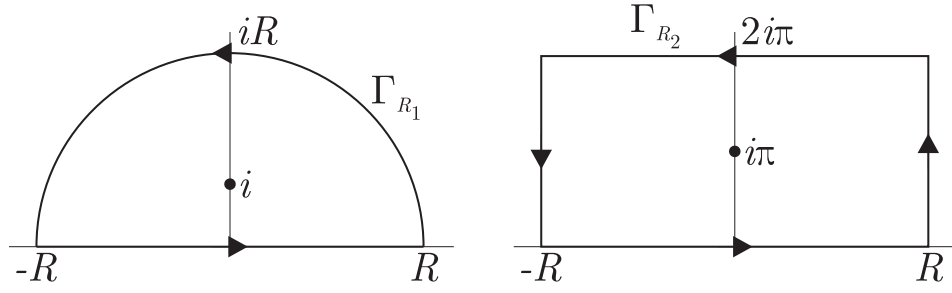


Abbildung 1.8: Zwei Wege durch die komplexe Ebene, die jeweils nur eine Polstelle einschließen.

da wir nur den Pol bei  $z = i$  umfahren. Das Residuum an dieser Stelle ist

$$\text{res}_i f = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{1 + z^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{(z - i)(z + i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i}.$$

Also ist

$$\frac{2\pi i}{2i} = \pi = \int_{\Gamma_{R_1}} f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz,$$

wobei  $C_R$  den halben Kreisbogen mit Radius  $R$  bezeichnet. Dessen Parametrisierung lautet  $C_R : z(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi]$ . Wir setzen diese ein und erhalten

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{1 + R^2 e^{2it}} dt.$$

Um den Betrag abschätzen zu können führen wir eine Nebenrechnung durch:

$$|1 + R^2 e^{2it}| = |e^{-2it} + R^2| \geq |R^2 - 1| \stackrel{R \geq \sqrt{2}}{\geq} \frac{1}{2} R^2.$$

Damit schätzen wir ab und erhalten

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{|1 + R^2 e^{2it}|} dt \leq \frac{2R}{R^2} \int_0^\pi dt = \frac{2\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Also verschwindet das Integral über den halben Kreisbogen für den Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  und der Wert des Kurvenintegrals über  $\Gamma_{R_1}$  ist gleich dem über die reelle Achse:

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R_1}} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = \pi.$$

### 1.0.5.13 Beispiel.

Als zweites Beispiel zur Demonstration der Residuenmethode zeigen wir, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad \text{für } 0 < a < 1.$$

Zunächst definiere eine komplexe Funktion  $f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$ . Für Polstellen betrachte eine Nullstelle von  $\frac{1}{f}$ ,  $1 + e^z = 0$ . Dies liefert  $z = i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ . Die Polstellen befinden sich also alle auf der imaginären Achse, bei ungeradzahligem Vielfachen von  $i\pi$ . Wir legen nun wieder einen Weg durch die komplexe Ebene, der nur eine Polstelle mit einschließt. Sei  $\Gamma_{R_2}$  der Weg entlang des Rechtecks, das durch die Punkte  $R, 2\pi iR, -2\pi iR$  und  $-R$  festgelegt ist, vgl. Abbildung 1.8. Dann ist nur eine Polstelle bei  $i\pi$  eingeschlossen. Das Residuum dort ist

$$\lim_{z \rightarrow i\pi} (z - i\pi) \frac{e^{az}}{1 + e^z} = \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{e^{az}}{\frac{e^z - e^{i\pi}}{z - i\pi}} = \frac{e^{ai\pi}}{(e^z)'(i\pi)} = \frac{e^{ai\pi}}{e^{i\pi}} = -e^{ai\pi}.$$

Mithilfe des Residuensatzes folgt

$$\int_{\Gamma_{R_2}} f(z) dz = -2\pi i e^{ai\pi}.$$

Dabei setzt sich  $\Gamma_{R_2}$  aus vier Teilstrecken zusammen, eine auf der reellen Achse, eine parallel zur reellen Achse auf der Höhe  $2\pi i$  sowie zwei Stücke an den Seiten. Das Integral über das Teilstück der reellen Achse sei bezeichnet mit  $I_R$ , das parallel zur reellen Achse mit  $I'_R$ . Es ist also

$$\int_{\Gamma_{R_2}} f(z) dz = I_R + I'_R + \text{Seitenintegrale} = -2\pi i e^{ai\pi}.$$

Als Parametrisierung für  $I'_R$  wähle  $z(t) = 2i\pi + t, t \in [-R, R]$ . Das Integral ist dann

$$I'_R = - \int_{-R}^R \frac{e^{a(2\pi i + t)}}{1 + e^{2\pi i + t}} dt = - \int_{-R}^R \frac{e^{2\pi i a} e^{at}}{1 + e^{2\pi i} e^t} dt = -e^{2\pi i a} I_R,$$

denn das Integral über das Teilstück der reellen Achse  $I_R$  ist

$$I_R = \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

Also ist

$$\int_{\Gamma_{R_2}} f(z) dz = I_R(1 - e^{2\pi i a}) + \text{Seitenintegrale} = -2\pi i e^{ai\pi}.$$

Für die Beträge der Seitenintegrale ergibt sich beispielhaft für den rechten Teil mit einer Parametrisierung  $z(t) = R + it, t \in [0, 2\pi]$

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+it)}}{1 + e^{R+it}} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{|1 + e^R e^{it}|} dt \leq 2 \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R} dt = e^{(a-1)R} 4\pi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

da  $0 < a < 1$ . Es wurde zudem verwendet, dass gilt  $|1 + x| \geq \frac{1}{2}|x|$  für  $|x|$  groß genug. Das Integral auf der linken Seite lässt sich analog abschätzen und verschwindet für  $R \rightarrow \infty$ . Also ergibt sich insgesamt

$$I_R = \frac{-2\pi i e^{ai\pi}}{1 - e^{2ai\pi}} = -2\pi i \frac{e^{ai\pi}}{e^{ai\pi}(e^{-ai\pi} - e^{ai\pi})} = \frac{2\pi i}{e^{ai\pi} - e^{-ai\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

#### 1.0.5.14 Beispiel. Dirichlet-Problem

Wir betrachten eine auf der Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | 0 \leq |z| \leq \rho\}$  für  $\rho < 1$  holomorphe Funktion  $u$ . Wir nehmen an, dass  $u = u_0(t)$  auf dem Rand vorgegeben und dass  $u$  zusätzlich am Rand noch stetig ist. Nun soll die stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta u(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{D} \tag{1.1}$$

gelöst werden. Dafür sind die folgenden drei Schritte notwendig:

1. Zeige zunächst

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \right) d\varphi. \tag{1.2}$$

Man erhält nun wegen

$$\operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} - \frac{e^{i\varphi} + 1/\bar{z}}{e^{i\varphi} - 1/\bar{z}} \right)$$

folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} \left( \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} - \frac{e^{i\varphi} + 1/\bar{z}}{e^{i\varphi} - 1/\bar{z}} \right) f(e^{i\varphi}) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \underbrace{\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z}}_A + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{z - e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z}}_C - \underbrace{\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - 1/\bar{z}}}_B - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1/\bar{z} - e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - 1/\bar{z}}}_D \right] f(e^{i\varphi}) d\varphi \end{aligned}$$

- Mit dem CAUCHY'schen Integralsatz erhält man direkt, dass  $1/(2\pi) \int_0^{2\pi} Af(e^{i\varphi})d\varphi = f(z)$ .
- Für  $B$  ergibt sich leicht, dass  $\int_{\partial\mathbb{D}} B = 0$  ist, weil  $B$  innerhalb von  $\mathbb{D}$  keine Pole hat.
- Offensichtlich ist aber auch  $C + D = 0$ .

Damit ist (1.2) gezeigt. Durch Umformungen erhält man aus (1.2) dann mit  $z = e^{i\theta}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) P_r(\varphi - \theta) d\varphi,$$

wobei  $P_r$  den POISSON-Kern bezeichnet, welcher durch

$$P_r(\gamma) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\gamma)}$$

gegeben ist.

- Die Formel gilt auch, wenn  $f$  holomorph auf  $\mathbb{D}$  und stetig auf  $\overline{\mathbb{D}}$ , da das Integral für festes  $z$  auch für  $\rho \rightarrow 1$  konvergiert.
- Es gelte nun  $u = \operatorname{Re} f$  mit einer auf  $\mathbb{D}$  holomorphen Funktion  $f$ .  $u$  erfülle  $\Delta u = 0$  wie in (1.1) und  $u = u_0$  sei am Rand stetig. Es gilt

$$g(z) = 2 \frac{\partial u}{\partial z} = \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x, y)$$

Wegen  $(\partial_{\bar{z}} f = 0) \Rightarrow f$  holomorph folgt daraus:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} u = 2 \Delta u = 0$$

$\Rightarrow g$  holomorph  $\Rightarrow \exists F$  mit  $F' = g$ .

BEMERKUNG. Sei  $u = \operatorname{Re} f$ , dann gilt  $f' = g$ , also  $f = F + c$  (ist Realteil einer komplexen Funktion). Da aber

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \\ &= u(r, \theta) + iv(r, \theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(1, \varphi) + iv(1, \varphi)) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(1, \varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \end{aligned}$$

Daher gilt

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi,$$

also kann man eine Lösung für  $u$  finden.

## 1.0.6 Singularitäten

### 1.0.6.1 Definition.

Sei  $f$  holomorph in  $\Omega$  bis auf einen Punkt  $z_0 \in \Omega$ . Wenn man  $f(z_0)$  so definieren kann, dass  $f$  holomorph in  $\Omega$  wird, dann nennt man  $z_0$  BEHEBBARE Singularität.

### 1.0.6.2 Theorem. Riemann's Theorem

Sei  $f$  holomorph in  $\Omega$  bis auf einen Punkt  $z_0 \in \Omega$ . Wenn  $f$  beschränkt ist in  $\Omega \setminus \{z_0\}$ , dann ist  $z_0$  eine behebbare Singularität. Dies ist eine besondere Eigenschaft komplexer Funktionen und gilt NICHT im  $\mathbb{R}^n$ .

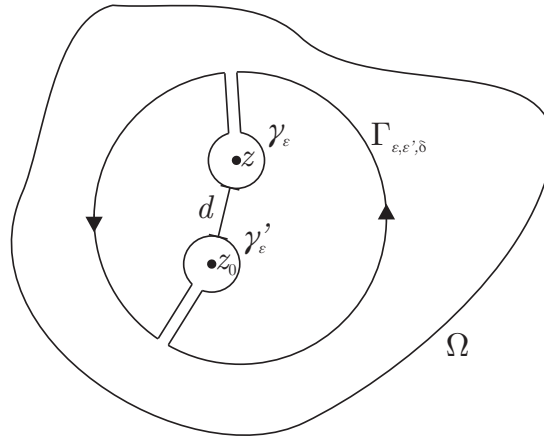


Abbildung 1.9: Ein Weg, der sowohl  $z$  als auch  $z_0$  umfährt. Dabei ist der Abstand  $d$  mindestens  $\frac{1}{2}|z - z_0|$  groß.

*Proof.* Der Beweis wird analog zu 1.0.4.7 geführt. Es ist zu zeigen, dass man schreiben kann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \forall z \neq z_0 \text{ innerhalb von } C.$$

Mit  $f(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$  wird  $f$  holomorph in  $\Omega$ . Wir wählen unseren Weg  $\Gamma_{\epsilon, \epsilon', \delta}$  so, dass er sowohl  $z$  als auch  $z_0$  umfährt (vgl. Abbildung 1.9) und damit nur auf einer holomorphen Funktion definiert ist. Dabei soll der Abstand der beiden Kreise um  $z$  und  $z_0$  mindestens  $\frac{1}{2}|z - z_0|$  betragen. Nun lassen wir  $\delta$  gegen Null gehen und erhalten dadurch drei Integrale über Kreise:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_{\epsilon, \epsilon', \delta}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon, \epsilon', \delta}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma'_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ \Rightarrow \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \underbrace{\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\int_{\gamma'_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}_{\textcircled{2}}. \end{aligned}$$

Dabei kann man für das Integral  $\textcircled{1}$  schreiben:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi \\ &= \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + 2\pi i f(z). \end{aligned}$$

Der vordere Term verschwindet im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$ , da  $f$  holomorph in  $z$ :

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \sup_{\xi \in D_\tau} \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| |l(\gamma_\epsilon)| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Für den Betrag von  $\textcircled{2}$  kann man schreiben

$$|\textcircled{2}| = \left| \int_{\gamma'_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \sup \frac{2|f(\xi)|}{|z - z_0|} |l(\gamma'_\epsilon)| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0,$$

da nach Voraussetzung der Abstand der beiden Kreise um  $z$  und  $z_0$  mindestens  $\frac{1}{2}|z - z_0|$  beträgt. Es folgt insgesamt

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z) \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

□

### 1.0.6.3 Bemerkung.

Mittels Riemann's Theorem lassen sich Singularitäten klassifizieren.

### 1.0.6.4 Korollar.

Habe  $f$  bei  $z_0$  eine isolierte Singularität. Dann gilt

$$f \text{ hat einen Pol bei } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

*Proof.* „ $\Rightarrow$ “:  $z_0$  ist Pol, d.h.  $\frac{1}{f(z)}$  hat Nullstelle bei  $z_0$ .  $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{|f(z)|} < \epsilon \Leftrightarrow |f(z)| > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .

„ $\Leftarrow$ “:  $\frac{1}{f(z)}$  ist holomorph in einer Umgebung von  $z_0$  und  $\frac{1}{|f(z)|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ . Also ist  $\frac{1}{f(z)}$  beschränkt in einer Umgebung von  $z_0$ . Nach Riemann's Theorem ist  $\frac{1}{f}$  holomorph in  $\frac{1}{f(z_0)} = 0 \Rightarrow z_0$  ist Pol.  $\square$

### 1.0.6.5 Definition.

Sei  $z_0$  isolierte Singularität und weder Pol noch behebbar. Dann nennt man  $z_0$  WESENTLICHE Singularität.

### 1.0.6.6 Theorem. Casorati-Weierstraß

Sei  $f$  holomorph in  $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  und habe  $f$  wesentliche Singularität bei  $z_0$ . Dann liegt das Bild von  $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  dicht in  $\mathbb{C}$ .

*Proof.* Annahme:  $f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$  liegt nicht dicht in  $\mathbb{C}$ . Dann gibt es ein  $\omega_0 \in \mathbb{C}$  und  $\epsilon > 0$  sodass  $f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\}) \subset \mathbb{C} \setminus D_\epsilon(\omega_0)$ , denn  $\forall \omega_0$  und  $\forall \epsilon > 0 \exists \omega : |\omega - \omega_0| < \epsilon$  sodass  $\omega = f(z) \forall z \in U_\delta(z_0)$ .

Es ist dann  $f(z) - \omega_0$  holomorph in  $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  und damit natürlich auch  $g(z) := \frac{1}{f(z) - \omega_0}$  holomorph in  $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Nach Riemann's Theorem ist  $z_0$  behebbar Singularität von  $g$ , da  $g$  beschränkt ist nach Annahme.  $\Rightarrow g$  holomorph in  $D_r(z_0)$ . Jetzt kann es nur zwei Möglichkeiten geben, beide führen zum Widerspruch:

1.  $g(z_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)} = f(z) - \omega_0$  ist holomorph in  $D_r(z_0)$ . Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass  $z_0$  wesentliche Singularität von  $f$  ist.
2.  $g(z_0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)}$  hat einen Pol bei  $z_0$  und damit auch  $f$ . Dies ist auch ein Widerspruch zur Annahme, dass  $z_0$  wesentliche Singularität von  $f$  ist.

Somit muss das Gegenteil der Annahme gelten und das Bild von  $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  liegt dicht in  $\mathbb{C}$ .  $\square$

### 1.0.6.7 Definition.

$f$  ist meromorph in  $\Omega$ , wenn es eine Folge von Punkten  $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$  gibt, die keine Häufungspunkte in  $\Omega$  hat, sodass

- (a)  $f$  holomorph in  $\Omega \setminus \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$
- (b)  $f$  hat Pole bei  $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ .

$f$  hat einen Pol bei  $z = \infty$ , wenn  $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  einen Pol bei 0 hat.

### 1.0.6.8 Beispiel.

Zur Veranschaulichung des nachfolgenden „Argument principle“ zwei konkrete Beispiele. Betrachte das Integral  $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  für

- (a)  $f(z) = az^n$

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_C \frac{naz^{n-1}}{az^n} dz = n \int_C \frac{1}{z} dz = n2\pi i$$

- (b)  $f(z) = \frac{a}{z^n}$

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_C \frac{-naz^{-(n+1)}}{az^{-n}} dz = -n \int_C \frac{1}{z} dz = -n2\pi i$$

Das Integral über  $\frac{f'}{f}$  liefert also Information über die Anzahl an Nullstellen oder Pole einer Funktion.

### 1.0.6.9 Theorem. „Argument principle“

Sei  $f$  meromorph in  $\Omega$  und  $C \subset \Omega$  ein Kreis (toy-contour) innerhalb  $\Omega$ . Wenn  $f$  keine Nullstellen und Pole auf  $C$  hat, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \{\# \text{Nullstellen}\} - \{\# \text{Pole}\},$$

gerechnet MIT Vielfachheit.

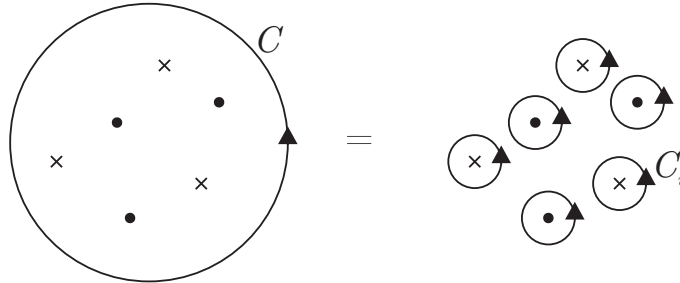


Abbildung 1.10: Integriert man über einen Kreis  $C$ , der Nullstellen (Punkte) und Polstellen (Kreuze) beinhaltet, so genügt es kleine Kreise  $C_i$  um besagte Stellen zu integrieren.

*Proof.* Legt man einen Schlüsseloch-Weg um die Nullstellen und Pole von  $f$ , so erhält man, dass das Integral über einen Kreis äquivalent zur Integration über viele kleine Kreise um die Nullstellen/Pole ist (vgl. Abbildung 1.10):

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_i \int_{C_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

- (a) Sei  $z_l$  Nullstelle. Dann kann man in einer Umgebung von  $z_l$  die Funktion  $f$  darstellen durch  $f(z) = (z - z_l)^n g(z)$  mit  $g(z)$  holomorph und  $\neq 0$  in einer Umgebung von  $z_l$ . Für  $\frac{f'}{f}$  bedeutet das

$$\frac{f'}{f} = \frac{((z - z_l)^n g(z))'}{(z - z_l)^n g(z)} = \frac{n(z - z_l)^{n-1} g(z) + (z - z_l)^n g'(z)}{(z - z_l)^n g(z)} = n \frac{1}{z - z_l} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Es folgt

$$\int_{C_l} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n \int_{C_l} \frac{1}{z - z_l} dz + \int_{C_l} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = n2\pi i + 0,$$

wobei beim letzten Gleichheitszeichen verwendet wurde, dass  $g$  und folglich auch  $g'$  holomorph in einer Umgebung von  $z_l$  sind.

- (b) Sei  $z_k$  Polstelle. Dann kann man in einer Umgebung von  $z_k$  für  $f$  schreiben  $f(z) = (z - z_k)^{-n} h(z)$  mit  $h(z)$  holomorph und  $\neq 0$  in einer Umgebung von  $z_k$ . Analog zu (a) erhält man

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n}{z - z_k} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Und damit folgt für das Integral

$$\int_{C_k} \frac{f'}{f} dz = -n \int_{C_k} \frac{1}{z - z_k} dz + \int_{C_k} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = -n2\pi i.$$

□

### 1.0.6.10 Theorem. Rouché's Theorem

Seien  $f$  und  $g$  holomorph in einer offenen Menge  $\Omega$ , die den Kreis  $C$  beinhaltet. Falls  $|f(z)| > |g(z)|$  auf  $C$ , dann haben  $f$  und  $f + g$  die gleiche Anzahl an Nullstellen innerhalb von  $C$ .



*Proof.* Definiere  $f_t(z) := f(z) + tg(z)$  mit  $t \in [0, 1]$ . Nach dem „Argument principle“ gilt für die Anzahl von Nullstellen von  $f_t(z)$  innerhalb von  $C$

$$n_t = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} dz.$$

Da  $n_t \in \mathbb{N}_0$  genügt es nun zu zeigen, dass  $n_t$  stetig ist. Damit ist automatisch  $n_1 = n_0$  weil  $n_t$  dann nur konstant sein kann. Es ist  $(t, z) \mapsto \frac{f'_t(z)}{f_t(z)}$  stetig auf  $[0, 1] \times C$ , da  $f_t(z)$  stetig in Abhängigkeit von  $(t, z)$  und  $|f_t(z)| > \epsilon$  auf  $C$  weil

$$|f_t(z)| = |f(z) + tg(z)| \geq |f(z)| - t|g(z)| \geq \inf_{z \in C} (|f(z)| - t|g(z)|) =: \epsilon.$$

Damit ist  $n_t$  stetig in Abhängigkeit von  $t$  und damit  $n_1 = n_0$ . □

### 1.0.6.11 Definition. Riemann'sche Sphäre

Die Riemann'sche Sphäre ist die erweiterte komplexe Ebene  $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Die Veranschaulichung der Riemann'schen Sphäre liefert die stereographische Projektion  $p : S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty, x \mapsto p(x)$  wobei  $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$  die Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^3$  ist.  $p(x)$  ist der Schnittpunkt der Gerade durch den Nordpol der Einheitssphäre  $N = (0, 0, 1)$  und  $x \in S^2$  mit der Ebene  $E_3 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ . Dieser wird aufgefasst als Punkt auf  $\mathbb{C}_\infty$ , dabei ist  $p(N) := \infty$ . Das bedeutet es gibt nur positive Unendlichkeit auf der Riemann'schen Sphäre.

Für die explizite Formulierung der stereographischen Projektion sei  $x \in S^2$ , dann ist die Gerade durch  $x$  und  $N$  das Bild von  $g(t) = N + (x - N)t$ . Der Schnittpunkt mit  $E_3$  wird angenommen wenn

$$0 = (g(t))_3 = 1 + (x_3 - 1)t \Rightarrow t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

Also ist die explizite Formulierung der stereographischen Projektion

$$p(x) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Die Umkehrabbildung der stereographischen Projektion ist  $p^{-1} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$ . Um die explizite Formulierung von  $p^{-1}$  zu finden gehe von  $z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}_\infty$  aus. Es gilt  $z = z_1 + iz_2 = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}$ , weiterhin gilt für das Betragsquadrat von  $z$ :

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3},$$

wobei beim vorletzten Gleichheitszeichen wurde die Gleichung der Einheitssphäre  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  verwendet wurde. Es folgt

$$\Rightarrow x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad 1 - x_3 = \frac{2}{|z|^2 + 1}.$$

Also folgt für die explizite Darstellung von  $p^{-1}$ :

$$\Rightarrow p^{-1}(z_1 + iz_2) = \frac{1}{|z|^2 + 1} \begin{pmatrix} 2z_1 \\ 2z_2 \\ |z|^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Die Umkehrung der stereographischen Projektion definiert eine Distanzfunktion auf  $\mathbb{C}_\infty, d : \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Definiere

$$d(z, w) := \|p^{-1}(z) - p^{-1}(w)\| = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}.$$

Da  $p^{-1}(\infty) = N$  kann man einen Abstand zu  $\infty$  definieren,  $d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$ . Diese Distanzfunktion ist eine Metrik, da schon  $(x, y) \mapsto \|x - y\|$  eine ist.

Weiterhin ist die stereographische Projektion  $p$  winkeltreu. Für zwei Kurven  $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  die sich in  $x = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  schneiden ist der Winkel mit dem sie sich schneiden definiert als der Winkel mit dem sich ihre Tangenten  $\gamma'_1(0)$  und  $\gamma'_2(0)$  schneiden. Wenn nun  $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^2$  so gilt bei Winkeltreue

$$\frac{\langle \gamma'_1(0), \gamma'_2(0) \rangle_{\mathbb{R}^3}}{\|\gamma'_1(0)\| \|\gamma'_2(0)\|} = \frac{\langle \frac{d}{dt}p(\gamma_1) |_{t=0}, \frac{d}{dt}p(\gamma_2) |_{t=0} \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|\frac{d}{dt}p(\gamma_1) |_{t=0}\| \|\frac{d}{dt}p(\gamma_2) |_{t=0}\|}.$$

Mit der Umkehrabbildung  $p^{-1}$  der stereographischen Projektion zeigt man für  $\gamma_a, \gamma_b : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}_\infty$

$$\begin{aligned} \langle \frac{d}{dt}p^{-1}(\gamma_a) |_{t=0}, \frac{d}{dt}p^{-1}(\gamma_b) |_{t=0} \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \langle \gamma'_a(0), (D(p^{-1}))^T(x)(D(p^{-1}))(x)\gamma'_b(0) \rangle_{\mathbb{R}^2} \\ &= \frac{4}{(|z|^2 + 1)^2} \langle \gamma'_a(0), \gamma'_b(0) \rangle_{\mathbb{R}^2} \\ &= g_{\mathbb{C}_\infty}(\gamma'_a(0), \gamma'_b(0)) \\ &= \langle \gamma'_a(0), \gamma'_b(0) \rangle_{\mathbb{C}_\infty}. \end{aligned}$$

Geometrisch kann man sich überlegen, dass das Bild der Tangente  $t$  der Schnitt der Ebene, die durch  $t$  und  $N$  aufgespannt wird, mit der Ebene  $E_3$  ist, also auch wieder eine Gerade. Sei  $C$  Kreis. Dann ist auch das Bild von  $C$ ,  $p(C)$ , ein Kreis. Einzige Ausnahme sind Kreise durch  $N$ , diese werden auf Geraden auf  $\mathbb{C}_\infty$  abgebildet (Kreise mit Radius  $\infty$ ).

#### 1.0.6.12 Theorem. Open mapping theorem

Sei  $f$  holomorph und nicht konstant im Gebiet  $\Omega$ . Dann ist  $f$  offene Abbildung (das Bild einer offenen Menge ist offen).

*Proof.* Es sei  $V_\epsilon := \{w \mid |w - w_0| < \epsilon\}$  mit  $w_0 := f(z_0)$ . Nun ist zu zeigen, dass  $V_\epsilon \subset f(U_\delta)$  und wenn  $w \in V_\epsilon$  dann  $\exists z \in U_\delta$  mit  $f(z) = w$ . Wähle dazu ein festes  $w$  und definiere

$$f(z) - w = \underbrace{f(z) - w_0}_{:=F(z)} + \underbrace{w_0 - w}_{:=G(z)}.$$

Wähle weiterhin  $\delta$  klein genug mit  $f(z) - w_0 \neq 0$  auf  $C_\delta$ ,  $K(\delta) := \min_{z \in C_\delta} |f(z) - w_0|$ . Sei  $\epsilon > 0$  mit  $\epsilon < K(\delta)$ . Dann gilt  $|F(z)| > |G(z)| = \epsilon$  für  $z \in C_\delta$ . Damit gilt nach Rouché's Theorem, dass  $F(z)$  und  $F(z) + G(z) = f(z) - w$  die gleiche Anzahl an Nullstellen in  $C_\delta$  haben.  $\square$

#### 1.0.6.13 Theorem. Maximum modulus principle

Sei  $f$  holomorphe, nicht konstante Funktion im Gebiet  $\Omega$ . Dann kann  $|f|$  das Maximum NICHT innerhalb  $\Omega$  annehmen.

*Proof.* Annahme:  $|f|$  nimmt Maximum bei  $z_0 \in \Omega$  an. Dann gibt es ein  $f(z)$  mit  $z \in D_r(z_0)$  sodass  $|f(z)| > |f(z_0)|$ .  $\square$

#### 1.0.6.14 Korollar.

Sei  $\Omega$  Gebiet mit kompaktem Abschluss  $\overline{\Omega}$ . Dann gilt für eine holomorphe, nicht konstante Funktion  $f$

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Dies gilt auch für harmonische Funktionen.

#### 1.0.6.15 Definition. Homotopie

Zwei Kurven sind homotop, wenn eine stetig in die andere überführt werden kann, mathematisch formuliert bedeutet das:  $\gamma_0$  und  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  sind homotop, wenn  $\forall s \in [0, 1] \exists$  Kurve  $\gamma_s$  mit Parametrisierung  $\gamma_s(t)$ ,  $\gamma_s(a) = \alpha, \gamma_s(b) = \beta$  die stetig in  $(t, s) \in [a, b] \times [0, 1]$  ist.

### 1.0.6.16 Theorem.

Sei  $f$  holomorph in  $\Omega$ . Falls  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  homotop sind gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

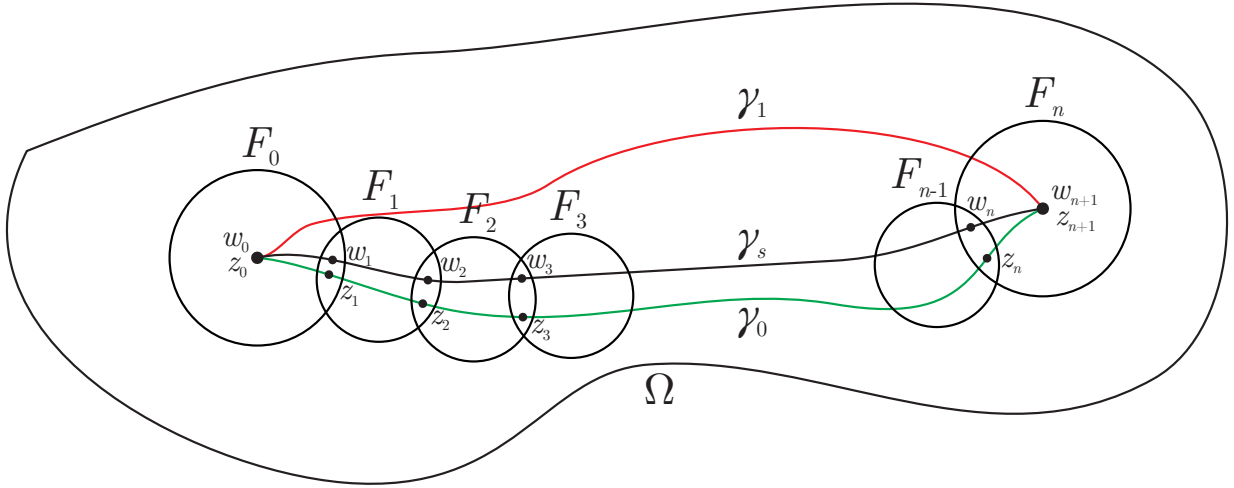


Abbildung 1.11: Illustration der Beweismethode.

*Proof.* Betrachte Abbildung 1.11 zur Veranschaulichung. Da  $f$  holomorph, findet man in Umgebungen um feste Punkte Stammfunktionen  $F_i$ , für die gilt  $\forall i : F'_i = f$  und  $F_i = F_{i+1} + c_i$ , da sich die Stammfunktionen jeweils nur um eine Konstante unterscheiden können. Wählt man eine Kurve  $\gamma_s$ , die nah zur Kurve  $\gamma_0$  verläuft, so kann man Stammfunktionen definieren, die beide Kurven einschließen. Man schreibt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_s} f &= \sum_{i=0}^n \left( \int_{z_i}^{z_{i+1}} f - \int_{w_i}^{w_{i+1}} f \right) \\ &= \sum_{i=0}^n [(F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i)) - (F_i(w_{i+1}) - F_i(w_i))] \\ &= \sum_{i=0}^n [(F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1})) - (F_i(z_i) - F_i(w_i))] \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} [F_{i-1}(z_i) - F_{i-1}(w_i)] - \sum_{i=0}^n [F_i(z_i) - F_i(w_i)] \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{=} (F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1}) - (F_0(z_0) - F_0(w_0))) \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{=} 0. \end{aligned}$$

Bei  $\textcircled{1}$  wurde verwendet, dass

$$F_{i-1}(z_i) - F_{i-1}(w_i) = F_i(z_i) - F_i(w_i),$$

da  $F_{i-1}(z) = F_i(z) + c$ , wenn  $z$  aus dem Schnitt der beiden Kreise in denen  $F_{i-1}$  und  $F_i$  definiert sind. Damit heben sich alle Terme bis auf den ersten und den letzten auf. Bei  $\textcircled{2}$  geht ein, dass nach Konstruktion  $z_0 = w_0$  und  $z_{n+1} = w_{n+1}$ . Damit gilt

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_s} f,$$

man wiederholt diese Prozedur, bis  $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$ .

□

### 1.0.6.17 Korollar.

Jede holomorphe Funktion in einem EINFACH ZUSAMMENHÄNGENDEN Gebiet  $\Omega$  hat eine Stammfunktion. Das Integral über geschlossene Wege verschwindet.

*Proof.*  $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\omega) d\omega$  liefert eine Stammfunktion. □

## 1.0.7 Komplexer Logarithmus

Der komplexe Logarithmus sollte folgende Eigenschaften erfüllen:

- (a)  $\log(z)$  sollte die Umkehrfunktion von  $e^z$  sein,  $e^{\log(z)} = z$
- (b) die Ableitung des Logarithmus ist  $(\log(z))' = \frac{1}{z}$
- (c) Für  $z = re^{i\theta}$  soll gelten  $\log(z) = \log(r) + i\theta$ .

Also muss man den Definitionsbereich einschränken. Eine bestimmte Wahl dieses Definitionsbereiches nennt man ZWEIG des Logarithmus.

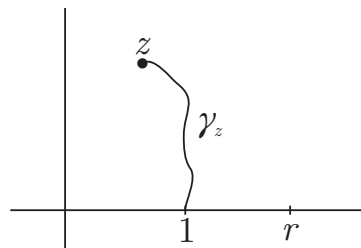
### 1.0.7.1 Theorem.

Sei  $\Omega$  einfach zusammenhängend mit  $1 \in \Omega$  und  $0 \notin \Omega$ . Dann gibt es einen Zweig des Logarithmus  $F(z) = \log_{\Omega}(z)$  sodass

- (a)  $F$  holomorph in  $\Omega$
- (b)  $e^{F(z)} = z$  mit  $z \in \Omega$
- (c)  $F(r) = \log(r)$  mit  $r > 0$ .

*Proof.* Da  $0 \notin \Omega$  ist  $\frac{1}{z}$  holomorph in  $\Omega$  und man kann eine Stammfunktion definieren durch

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\omega} d\omega.$$



Starte der Weg  $\gamma_z$  bei 1. Damit beweist man die Forderungen

- (a)  $\Rightarrow F(z)$  holomorph
- (b) zeige, dass  $e^{-F(z)}z = 1$ . Es ist

$$\frac{d}{dz} \left( e^{-F(z)}z \right) = e^{-F(z)}(1 - F'(z)z) = 0,$$

da  $F'(z) = \frac{1}{z}$ . Also kann  $e^{-F(z)}z$  nur konstant sein. Beispielhaft setzen wir  $z = 1$  um die Konstante zu bestimmen, es ist

$$F(1) = \int_{\gamma_1} \frac{1}{\omega} d\omega = 0 \Rightarrow e^{-F(1)}1 = e^{-0} = 1.$$

- (c) Für  $r > 0$  gilt

$$F(r) = \int_1^r \frac{1}{x} dx = \log(r).$$

□

### 1.0.7.2 Beispiel.

Definiere  $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_-\}$ . Dann ergibt sich für den Logarithmus

$$\log_{\Omega}(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{z} dz = \int_1^r \frac{1}{x} dx + \int_0^{\theta} \frac{1}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = \log(r) + i\theta$$

mit  $\theta \in (-\pi, \pi)$ .

### 1.0.7.3 Theorem.

Falls  $f$  eine nirgends verschwindende holomorphe Funktion  $f$  ist in einfach zusammenhängenden Gebiet  $\Omega$ , dann existiert eine holomorphe Funktion  $g$  auf  $\Omega$  mit

$$f(z) = e^{g(z)}.$$

Die Funktion  $g(z)$  kann als  $\log f(z)$  bezeichnet werden.

*Proof.* Fixiere Punkt  $z_0 \in \Omega$ . und definiere

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{g'(w)}{g(w)} dw + c_0,$$

wobei  $\gamma$  irgendein Weg von  $z_0$  nach  $z$  ist und  $c_0$  eine komplexe Zahl, sodass  $e^{c_0} = f(z_0)$  ist. Die Definition ist unabhängig von  $\gamma$  da  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist. Da  $f$  nicht verschwindet ist  $g$  holomorph mit

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

und offensichtlich

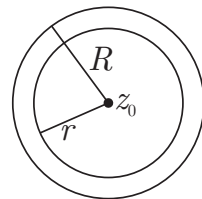
$$(f(z)e^{-g})' = 0,$$

sodass  $f(z)e^{-g}$  konstant ist. Da  $f(z_0)e^{-g(z_0)} = 1$ , folgt, dass die Konstante gleich 1 ist, womit die Aussage folgt. □

### 1.0.7.4 Theorem.

Sei  $f$  holomorph in  $D_R(z_0)$  sodass  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , dann gilt für  $a_n$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$



wobei  $r < R$ .

*Proof.* Verwende Theorem 1.0.4.10 und setze eine Parametrisierung  $\xi(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$  ein, sei zuerst  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i\theta(n+1)}} i r e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Analog erhält man für  $n < 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\xi) (\xi - z_0)^{-1-n} d\xi \\ &= 0, \end{aligned}$$

da der Integrand holomorph ist wegen  $(-1 - n) \geq 0$ . Mit Einsetzen einer Parametrisierung folgt das selbe Integral wie für  $n > 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i\theta(n+1)}} i r e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad \text{für } n < 0. \end{aligned}$$

□

### 1.0.7.5 Korollar.

Sei  $f$  wie oben, dann ist der Funktionswert des Kreismittelpunkts definiert durch

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

*Proof.* Aus der Entwicklung von  $f$  erhält man  $f(z_0) = a_0$ . Mit Theorem 1.0.7.4 berechnet man  $a_0$  und erhält das geforderte Ergebnis. □

### 1.0.7.6 Korollar.

Sei  $f$  wie oben,  $u = \operatorname{Re}(f)$ , dann ist

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Bemerke: Dies gilt auch für Funktionen  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Delta u = 0$  (also harmonische Funktionen).

### 1.0.7.7 Theorem. Laurent-Reihe

Sei  $f$  holomorph im Kreisring  $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$  mit  $0 < r_1 < r_2$ . Dann kann man für  $f$  schreiben  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ , wobei die Reihe absolut konvergiert innerhalb von  $\mathcal{R}$ .

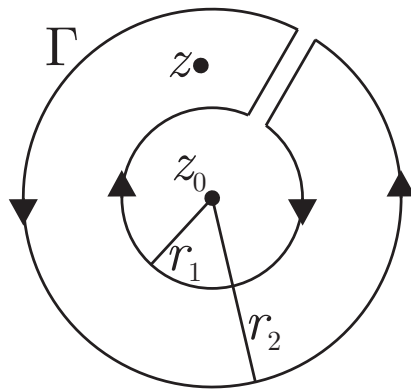


Abbildung 1.12: Integration entlang des Weges  $\Gamma$ .

*Proof.* Verwende Cauchy's Integralsatz um zu schreiben (vgl. Abbildung 1.12)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right).$$

Sei nun  $|\xi| = r_2$  und weiterhin  $|z| < r_2$ . Also ist  $\left| \frac{z-z_0}{\xi-z_0} \right| < 1$ . Verwende die geometrische Reihe um zu schreiben

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

Analog erhält man mit  $|\xi| = r_1$  und  $|z| > r_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\xi-z_0}{z-z_0}} = \frac{-1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(\xi - z_0)^{-n-1}}{(z - z_0)^{-n}} \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Also folgt insgesamt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{C_2} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi + \int_{C_1} f(\xi) \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ \text{mit } a_n &= \frac{1}{2\pi i} \begin{cases} \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi & n \geq 0 \\ \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi & n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit den Eigenschaften der geometrischen Reihe konvergiert die Laurent-Reihe absolut im Innern von  $\mathcal{R}$ .  $\square$

## 1.0.8 Konforme Abbildungen

### 1.0.8.1 Definition. konforme Abbildung

$f$  heißt KONFORME Abbildung, wenn  $f$  holomorph und bijektiv ist. Konform bedeutet winkelerhaltend. Zwei Gebiete  $U, V$  heißen KONFORM ÄQUIVALENT genau dann, wenn es zwei holomorphe Funktionen  $f : U \rightarrow V$  und  $g : V \rightarrow U$  gibt mit  $f(g(w)) = w$  und  $g(f(z)) = z$ .

### 1.0.8.2 Satz.

Sei  $f : U \rightarrow V$  holomorph und injektiv, dann ist  $f'(z) \neq 0 \forall z \in U$ . Die Inverse von  $f(U)$  ist auch holomorph.

*Proof.* Angenommen  $f'(z_0) = 0$ . Dann kann man  $f$  in eine Potenzreihe entwickeln und daran sofort ablesen, dass  $a_0 = f(z_0)$  und  $a_1 = f'(z_0) = 0$ . D.h. man kann schreiben  $f(z) - f(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ . Sei  $w \in V$  beliebig. Setze

$$f(z) - (f(z_0) + w) = F(z) + G(z)$$

mit  $F(z) := a_2(z - z_0)^2 - w$  und  $G(z) := \sum_{n=3}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^3 \sum_{i=0}^{\infty} a_{3+i} (z - z_0)^i$ . Wähle jetzt  $\epsilon$  so, dass

$$|a_2|\epsilon^2 = \underbrace{|a_2(z - z_0)^2|}_{\propto \epsilon^2} \Big|_{z \in C_\epsilon} > \underbrace{\max_{z \in C_\epsilon} |G(z)|}_{\propto \epsilon^3}.$$

Dann wähle  $w$  klein genug, so dass  $|a_2(z - z_0)^2 - w| > \max_{z \in C_\epsilon} |G(z)|$ . Damit ist  $|F(z)| > |G(z)|$  auf  $C_\epsilon$ . Nach Theorem 1.0.6.10 (Rouché) hat dann  $F(z) + G(z) = f(z) - f(z_0) - w$  mindestens so viele Nullstellen wie  $F(z)$  innerhalb von  $C_\epsilon$ . Für  $w$  klein genug ( $w < |a_2|\epsilon^2$ ) hat  $F(z)$  genau zwei Nullstellen und damit auch  $F(z) + G(z)$ . Dann kann aber  $f$  nicht injektiv sein, weil  $f'(z) \neq 0$  für  $z$  aus einer genügend kleinen Umgebung von  $z_0$ . Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme und da  $z_0$  beliebig war ist  $f'(z) \neq 0$  in ganz  $U$ .  $\square$

**1.0.8.3 Beispiel.**

Dieses Beispiel soll den obigen Satz plausibel machen. Sei  $g$  die Inverse von  $f$ . Definiere  $g(w) = z, g(w_0) = z_0$  und schreibe

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f'(z)}$$

mit  $f'(z) \neq 0$ . Also ist  $f'(z) \neq 0$  wenn die Umkehrabbildung existiert.

**1.0.8.4 Bemerkung. zur Winkeltreue**

Betrachte zwei Kurven im Komplexen,  $\gamma(t), \eta(t) \in \mathbb{C}$ , die sich für  $t = 0$  schneiden,  $\gamma(0) = \eta(0)$ . Die Tangenten sind  $\gamma'(0)$  und  $\eta'(0)$ . Unter welchem Winkel schneiden sie sich? Allgemein ist für zwei komplexe Zahlen  $w = re^{i\varphi}$  und  $z = \rho e^{i\theta}$  der Winkel enthalten in

$$\chi(w, z) := \frac{w\bar{z}}{|w||z|} = \frac{re^{i\varphi}\rho e^{-i\theta}}{r\rho} = e^{i(\varphi-\theta)}.$$

Das Argument der Funktion liefert dann den Winkel,  $\arg \chi(w, z) = \varphi - \theta$ . Für die beiden Tangenten ergibt sich

$$\chi(\gamma'(0), \eta'(0)) = \frac{\gamma'(0)\overline{\eta'(0)}}{|\gamma'(0)||\eta'(0)|} =: \alpha.$$

Unter Anwendung von  $f$  soll der Winkel nun der selbe sein. Nach der Kettenregel ist  $(f(\gamma(t)))' = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$  und man erhält

$$\begin{aligned} \chi((f(\gamma(0)))', (f(\eta(0)))') &= \frac{f'(\gamma(0))\gamma'(0)\overline{f'(\eta(0))\eta'(0)}}{|f'(\gamma(0))||\gamma'(0)||f'(\eta(0))||\eta'(0)|} \\ &= \frac{|f'(\gamma(0))|^2\gamma'(0)\overline{\eta'(0)}}{|f'(\gamma(0))|^2|\gamma'(0)||\eta'(0)|} \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

da  $\gamma(0) = \eta(0)$  und  $f' \neq 0$ .

**1.0.8.5 Theorem.**

Sei  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  die Einheitskreisscheibe ohne Rand und  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  die obere Halbebene ohne Rand. Dann ist die Funktion  $F(z) = \frac{i-z}{i+z}$  eine konforme Abbildung von  $\mathbb{H}$  nach  $\mathbb{D}$ .

*Proof.* Sei  $z \in \mathbb{H}$ . Dann ist  $|F(z)| = \frac{|z-i|}{|z-(-i)|} < 1$ . Wohin wird der Rand abgebildet? Der Rand von  $\mathbb{H}$  ist die reelle Achse, sei dazu  $x \in \mathbb{R}$ . Es ist

$$F(x) = \frac{i-x}{i+x} = -\frac{x-i}{x+i} = -\frac{\bar{w}}{w} \text{ mit } w = x+i$$

Es ist offensichtlich  $|F(x)| = 1$  und  $F(x=0) = 1, F(x=\pm\infty) = -1$ . Die Umkehrabbildung zu  $F$  ist  $G: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}, G(w) = i\frac{1-w}{1+w}$ . Der Rand der Einheitskreisscheibe ist der Einheitskreis,  $w = e^{i\varphi}$ . Dieser wird abgebildet auf

$$G(e^{i\varphi}) = i\frac{1-e^{i\varphi}}{1+e^{i\varphi}} = \frac{e^{i\varphi/2}}{e^{i\varphi/2}} \frac{e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}}{(-i)(e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2})} = \frac{\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)} = \tan(\varphi/2).$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass  $F(G(w)) = w$  und  $G(F(z)) = z$ . Dies wird dem geneigten Leser als Übungsaufgabe überlassen.  $\square$

**1.0.8.6 Beispiel. konforme Abbildungen**

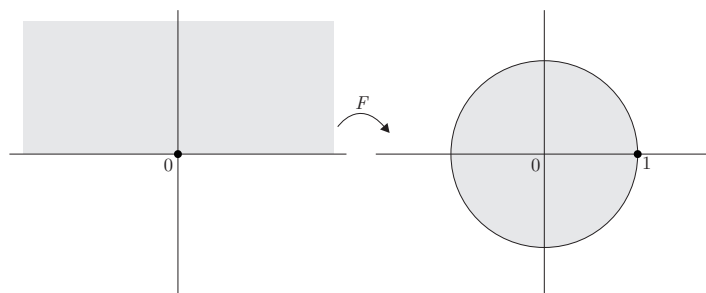
In der folgenden Tabelle sind einige konforme Abbildungen samt ihrer geometrischen Interpretation aufgeführt.



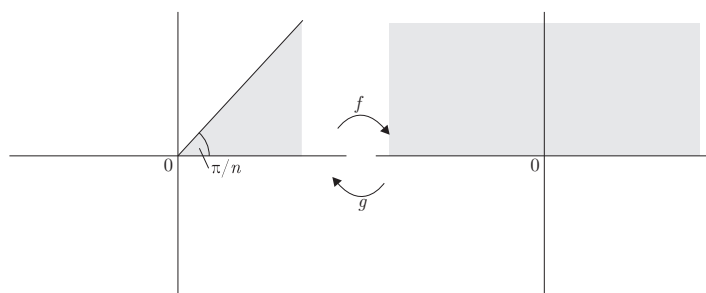
# Funktion

# Geometrische Interpretation

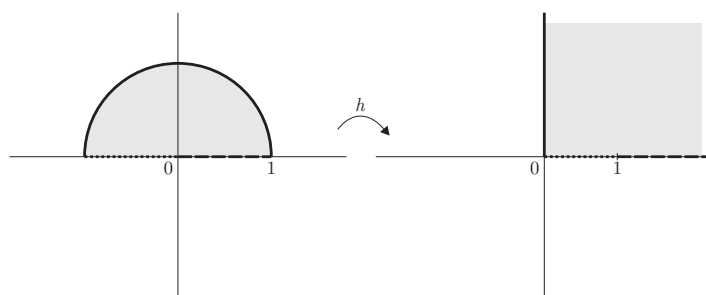
$$F(z) = \frac{i-z}{i+z}$$



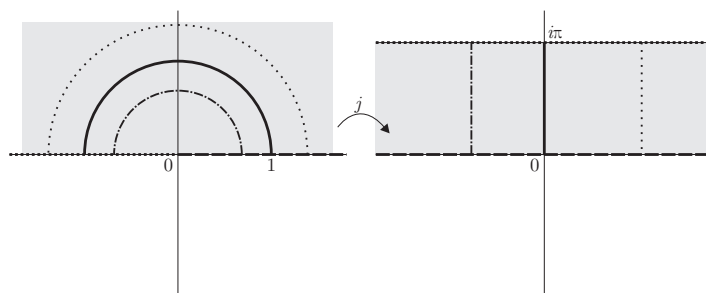
$$f(z) = z^n, g(w) = w^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log w}$$



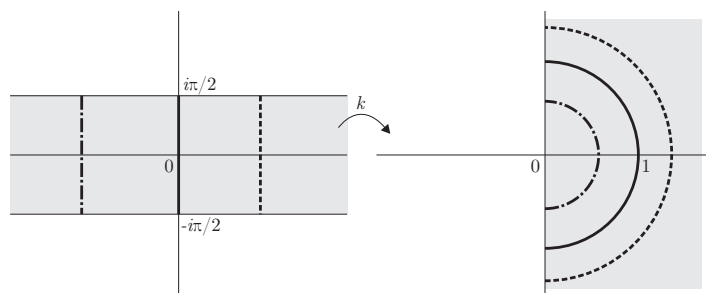
$$h(z) = \frac{1+z}{1-z}$$



$$j(z) = \log z$$

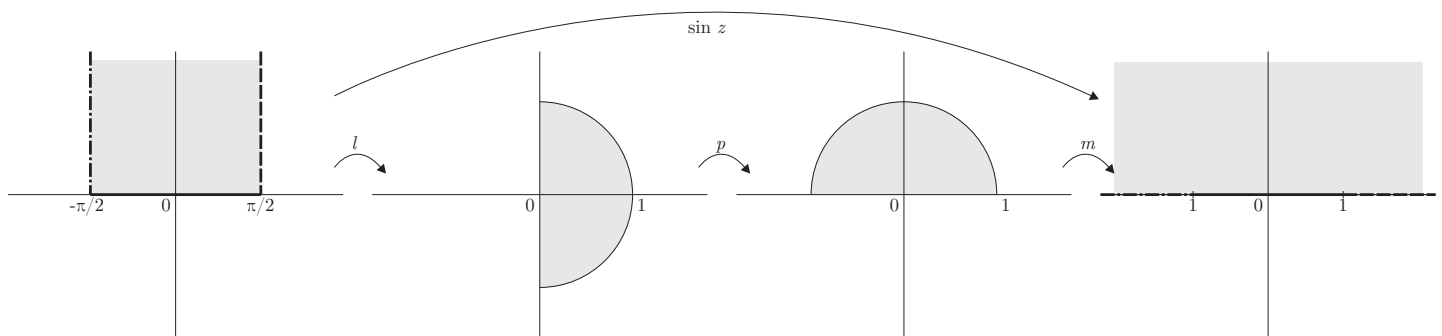


$$k(z) = e^z$$



Funktion	Geometrische Interpretation
$l(z) = e^{iz}$	
$m(z) = -\frac{z + \frac{1}{z}}{2}$	

Mithilfe dieser lässt sich der Sinus darstellen als  $\sin z = -\frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = m \circ p \circ l(z)$  wobei  $p(z) = iz$ :



### 1.0.8.7 Lemma. Schwarz

Für Funktionen  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $f(0) = 0$ , die holomorph sind gilt

- (a)  $|f(z)| \leq |z|$
- (b) Wenn es ein  $z_0 \in \mathbb{D}$  gibt mit  $|f(z_0)| = |z_0|$ , dann ist  $f$  eine Rotation,  $f(z) = ze^{i\theta}$  mit  $\theta \in [0, 2\pi]$ .
- (c)  $|f'(0)| \leq 1$ . Wenn  $|f'(0)| = 1$  ist  $f$  Rotation.

*Proof.* Zu (a): Da  $f$  holomorph auf  $\mathbb{D}$  kann man in eine Potenzreihe entwickeln ( $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ ) und erhält mit  $f(0) = 0$ , dass  $a_0 = 0$ . Definiere dann eine holomorphe Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0. \end{cases}$$

Sei  $|z| = r < 1$ . Dann ist  $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}$ , da  $|f(z)| \leq 1$ . Nach Theorem 1.0.6.13 (maximum modulus principle) gilt dies nun für alle  $z$  innerhalb des Kreises mit Radius  $r$ ,  $|g(z)| \leq \frac{1}{r} \forall |z| \leq r < 1$ . Da  $|g(z)|$  das Maximum nur auf dem Rand von  $\mathbb{D}$  annehmen kann folgt  $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1 \forall z \in \mathbb{D}$  und damit

$$|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}.$$

Zu (b): Es ist  $|f(z_0)| = |z_0|$  und damit  $|g(z_0)| = \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} = 1$ . Also nimmt  $|g(z)|$  das Maximum in Innern von  $\mathbb{D}$  an. Dann kann  $|g|$  nur konstant 1 auf  $\mathbb{D}$  sein.  $\Rightarrow g(z) = e^{i\theta}$  mit  $\theta \in [0, 2\pi]$  und damit folgt nach Definition von  $g(z)$ , dass  $f(z) = ze^{i\theta}$ .

Zu (c): Es ist  $\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$  und mit  $f(0) = 0$  auch  $\frac{|f(z) - f(0)|}{|z|} \leq 1$ . Bildet man jetzt den Limes  $z \rightarrow 0$  auf beiden Seiten, so erhält man

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|f(z) - f(0)|}{|z|} = |f'(0)| \leq 1.$$

Wenn nun nach Voraussetzung  $|f'(0)| = 1$ , so verwendet man das selbe Argument wie zuvor,

$$|f'(0)| = 1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = |g(0)|.$$

Da  $|g(z)|$  das Maximum im Innern von  $\mathbb{D}$  annimmt, kann  $|g(z)|$  nur konstant auf  $\mathbb{D}$  sein und damit ist  $g(z) = e^{i\theta}$  und  $f$  Rotation,  $f(z) = ze^{i\theta}$ .  $\square$

### 1.0.8.8 Definition. Automorphismus

Eine konforme Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  heißt AUTOMORPHISMUS auf  $\Omega$ . Es bezeichne  $\text{Aut}(\Omega)$  die Menge aller Automorphismen auf  $\Omega$ . Diese bilden eine Gruppe, d.h.

$$f \in \text{Aut}(\Omega) \wedge g \in \text{Aut}(\Omega) \Rightarrow f \circ g \in \text{Aut}(\Omega).$$

Weiterhin ist  $g^{-1} \circ f^{-1}$  die Inverse zu  $f \circ g$ .

### 1.0.8.9 Theorem.

Wenn  $f$  ein Automorphismus auf  $\mathbb{D}$  ist, dann existiert ein  $\theta \in [0, 2\pi]$  und  $\alpha \in \mathbb{D}$ , sodass

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

*Proof.* Definiere  $\psi_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$ . Es ist

$$\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = \frac{\alpha - \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}}{1 - \bar{\alpha} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}} = z,$$

d.h.  $\psi_\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , da  $\psi_\alpha$  holomorph und bijektiv. Weiterhin ist  $\psi_\alpha(0) = \alpha$  und  $\psi_\alpha(\alpha) = 0$ . Betrachte die Abbildung des Einheitskreises von  $\psi_\alpha$ :

$$\psi_\alpha(e^{i\theta}) = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{1 - \bar{\alpha}e^{i\theta}} = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - \bar{\alpha})} = -e^{-i\theta} \frac{\alpha - e^{i\theta}}{\alpha - e^{i\theta}} = -e^{-i\theta} \frac{w}{w}.$$

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  ist Automorphismus auf  $\mathbb{D}$  und deswegen gibt es ein  $\alpha \in \mathbb{D}$ , sodass  $f(\alpha) = 0$ . Definiere nun  $g(z) := f \circ \psi_\alpha$ . Da  $g$  eine Verkettung von Automorphismen ist, ist  $g$  selbst Automorphismus auf  $\mathbb{D}$ . Es ist  $g(0) = f \circ \psi_\alpha(0) = f(\alpha) = 0$ . Nach Lemma 1.0.8.7 (Swarz) ist  $|g(z)| \leq |z|$ . Für  $g^{-1}$  gilt dann das selbe, denn  $g^{-1}(0) = 0$  und  $g^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Also kann man auch schreiben  $|g^{-1}(w)| \leq |w|$  mit  $w = g(z)$ . Setzt man dieses ein erhält man  $|z| \leq |g(z)|$ . Also muss gelten  $|g(z)| = |z|$ . Nach Punkt (b) vom Lemma von Schwarz ist  $g$  dann eine Rotation,  $g(z) = f \circ \psi_\alpha(z) = e^{i\theta}z$ . Da  $\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = \text{Id}$  schreibt man

$$f(z) = f \circ \psi_\alpha \circ \psi_\alpha(z) = e^{i\theta} \psi_\alpha(z)$$

und erhält was zu zeigen war.  $\square$

### 1.0.8.10 Beispiel.

Man möchte eine konforme Abbildung von der oberen Halbebene in die obere Halbebene finden,  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ . Dazu transformiert man zuerst  $\mathbb{H}$  auf  $\mathbb{D}$ , hat dort eine konforme Abbildung  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  und transformiert dann wieder zurück.  $F(z) = \frac{i-z}{i+z}$  bildet die reelle Achse auf den Einheitskreis ab. Es ist dann

$$\varphi = F^{-1} \circ f \circ F(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

wobei  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$  gilt. Man kann allgemein schreiben

$$\varphi = \varphi_M(z) \text{ mit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det M = 1, \quad M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Verkettet man zwei Funktionen  $\varphi_M$  und  $\varphi_N$ , so gilt  $\varphi_M \circ \varphi_N = \varphi_{M \cdot N}(z)$ .

Nun wollen wir noch skizzieren, wie man zeigt dass jeder Automorphismus  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  von obiger Form ist, ausgehend davon, dass jede Matrix  $M$  einen Automorphismus von  $\mathbb{H}$  nach  $\mathbb{H}$  liefert. Sei  $\varphi$  beliebig. Dann gibt es  $\beta$  mit  $\varphi(\beta) = i$ . Nun stellen wir zuerst fest, dass man  $N$  finden kann sodass  $\varphi_N(i) = \beta$  ist. Dazu stellen wir uns zunächst die umgekehrte Frage, wie kann man  $M$  konstruieren, sodass  $\beta$  auf  $i$  abgebildet wird. Das  $N$  ergibt sich dann durch invertieren,  $N = M^{-1}$ . Wenn wir  $d = 0$  setzen dann sehen wir dass dann gilt

$$\Im(\varphi_M(\beta)) = \frac{\Im \beta}{|c\beta|^2}.$$

Also können wir  $c$  so bestimmen dass der Imaginärteil gleich 1 wird. Wähle

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Danach nimmt man einfach Translation um  $b$  sodass der Imaginärteil gleich eins wird, d.h.,

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige  $M$  ist also  $M = M_2 M_1$ . Mit der Konstruktion von  $N = M^{-1}$  gilt also  $\varphi_N \circ \varphi(i) = i$  und für die entsprechende Abbildung auf der Kreisscheibe

$$F \circ \varphi_N \circ \varphi \circ F^{-1}(0) = 0.$$

Damit ist  $F \circ \varphi_N \circ \varphi \circ F^{-1}$  eine Rotation, also nach unseren Übungen gibt es Drehmatrix  $M_\theta$ , mit

$$\varphi_N \circ \varphi = \varphi_{M_\theta},$$

und  $\varphi = \varphi_{N^{-1}M_\theta}$ .

#### 1.0.8.11 Theorem. Riemann'scher Abbildungssatz

Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen, nicht leer, nicht ganz  $\mathbb{C}$  und einfach zusammenhängend. Sei  $z_0 \in \Omega$ , dann existiert eine eindeutige konforme Abbildung  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ , sodass  $F(z_0) = 0$  und  $F'(z_0) > 0$ .

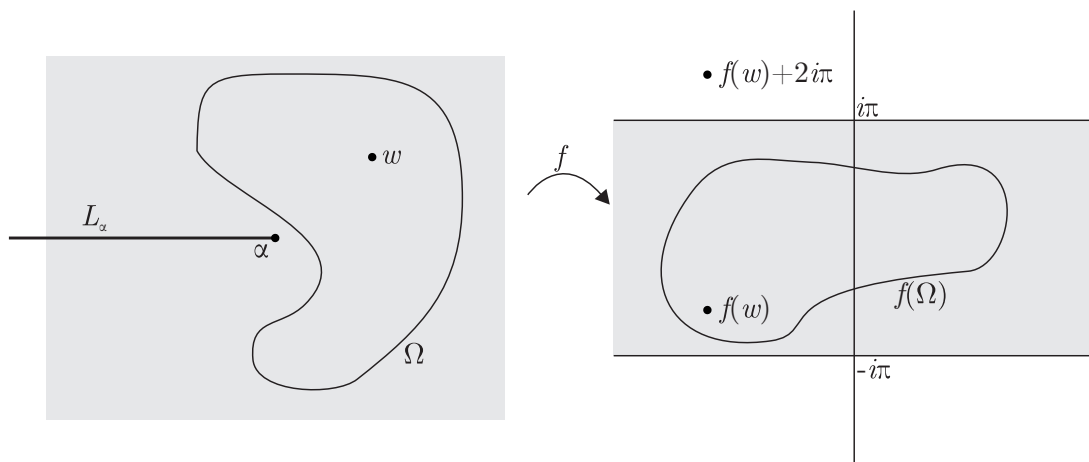


Abbildung 1.13: Die Menge  $\mathbb{C} \setminus \{L_\alpha\}$  wird auf einen Streifen in der komplexen Ebene abgebildet.

*Proof. 1. Schritt:* Man möchte eine konforme Abbildung  $F : \Omega \rightarrow U \subset \mathbb{D}$  finden. Sei zunächst  $\alpha \notin \Omega$ , dann ist  $f(z) = \log(z - \alpha)$  holomorph in  $\Omega$ . Sei weiterhin  $w \in \Omega$ , dann liegt  $f(w) + 2\pi i$  auf jeden Fall außerhalb des Bildes von  $\Omega$ , denn der Logarithmus bildet auf einen Streifen der Dicke  $2\pi$  ab (vgl. Abbildung 1.13). Das bedeutet insbesondere  $f(z) \neq f(w) + 2\pi i \forall z \in \Omega$  und damit

$$f(z) - (f(w) + 2\pi i) \neq 0 \forall z \in \Omega.$$

Definiere also eine Funktion

$$F(z) := a \frac{1}{f(z) - (f(w) + 2\pi i)} + c,$$

die beschränkt in  $\Omega$  ist. Mit geeigneten  $a, c$  ist  $|F(z)| < 1 \forall z \in \Omega \Rightarrow F : \Omega \rightarrow F(\Omega) \subset \mathbb{D}$ .

*2. Schritt:* Es genügt nun den Fall zu betrachten, dass  $\Omega \subset \mathbb{D}$  ist, mit  $0 \in \Omega$ . Dazu betrachten wir die Familie von Funktionen  $\mathcal{F}$  aller holomorphen injektiven Funktionen von  $\Omega$  nach  $\mathbb{D}$ , die den Ursprung in sich selbst abbilden.

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{D} \mid \text{holomorph, injektiv, } f(0) = 0\}.$$

Die Familie ist nichtleer, da  $f(z) = z$  offensichtlich darin enthalten ist. Mittels Cauchy Abschätzungen sieht man auch sofort dass  $\sup_f |f'(0)|$  gleichmäßig beschränkt ist, indem man einen kleinen Kreis um 0 legt. Nun gilt es zu schliessen dass es eine holomorphe Funktion in  $\mathcal{F}$  gibt, die diese Funktion maximiert. Auf jedem kompakten Bereich  $K$  ist  $\mathcal{F}$  gleichgradig stetig. Dies sieht man dadurch, dass  $|f'|$  auf ganz  $K$  gleichm. beschränkt bleibt. Mit der Beschränktheit für  $\mathcal{F}$  folgt, mit Arzela-Ascoli, aus 1. Semester, dass die Folge  $f_n$ , mit  $f'_n(0) = s = \sup_f |f'(0)|$ , eine Teilfolge hat die gegen Grenzwert gleichm. konvergiert auf  $K$ . Der Grenzwert ist natürlich wieder holomorph mit  $f(0) = 0$  und  $|f| < 1$ . Da  $K$  beliebig ist kann man das auf ganz  $\Omega$  ausdehnen. Die Injektivität lässt sich per Widerspruch zeigen. Nimm an, dass  $f$  nicht injektiv ist. Also es gibt  $z_1, z_2$  die Nullstellen von  $g(z) = f(z) - f(z_1)$  sind. Das heisst  $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'}{g}$  ist gleich 1 in geeignetem kleinen  $\gamma$  um  $z_2$ . Mittels Stetigkeit können wir dasselbe für  $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)$  folgern, was ein Widerspruch dazu ist dass  $g_n$  keine Nullstelle in  $\gamma$  haben kann.

*3. Schritt:* Nun zeigt man, dass  $f$  auch surjektiv ist. Man nimmt an die Surjektivität ist verletzt und führt Widerspruch zur Maximalität von  $|f'(0)|$  her. Sei  $\alpha \in \mathbb{D}$  so dass es nicht im Bild von  $f$  liegt, dann definiere  $\psi_\alpha \circ f$ , die 0 nicht im Bild hat, womit man die Wurzel  $g = e^{\frac{1}{2} \log z}$  definieren kann, also

$$\psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f = F$$

ist in  $\mathcal{F}$ . Es gilt

$$f = \Phi \circ F = \psi_\alpha \circ h \circ \psi_{g(\alpha)} \circ f,$$

mit  $|\Phi'(0)| < 1$ , da  $\Phi$  nicht injektiv ist, da  $h(z) = z^2$ . Somit gilt  $|F'(0)| > |f'(0)|$  was ein Widerspruch zur Annahme ist.  $\square$

### 1.0.8.12 Korollar.

Erfülle  $U, V$  die Bedingungen von oben. Dann sind  $U, V$  konform äquivalent.

### 1.0.8.13 Beispiel.

Die Funktion  $S$  bildet die obere Halbebene auf ein Rechteck ab,

$$S(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi + k^{-1})(\xi + 1)(\xi - 1)(\xi - k^{-1})}}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}.$$

Um die Behauptung zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass die reelle Achse auf den Rand des Rechtecks abgebildet wird. Sei zunächst  $\beta > 0$ . Dann gilt

$$\left(\xi + \frac{1}{k}\right)^\beta = e^{\beta \log(\xi + \frac{1}{k})} = e^{\beta(\log|\xi + \frac{1}{k}| + i \arg(\xi + \frac{1}{k}))} = \left|\xi + \frac{1}{k}\right|^\beta e^{i\beta \arg(\xi + \frac{1}{k})}.$$

Sei o.B.d.A.  $\frac{1}{k} > 1$  und  $F(\xi) := (\xi + k^{-1})(\xi + 1)(\xi - 1)(\xi - k^{-1})$ . Betrachte nun  $S(z)$  mit  $z \in \mathbb{R}$  und ändere die Grenzen im Integral:

$$S(z) = \int_{-\infty}^z \frac{d\xi}{F(\xi)^{1/2}} - \int_{-\infty}^0 \frac{d\xi}{F(\xi)^{1/2}} =: \tilde{S}(z) + c,$$

dabei ist  $c \in \mathbb{C}$  eine Konstante, die das Rechteck auf der komplexen Ebene verschiebt. Für die Form genügt es daher  $\tilde{S}(z)$  zu betrachten.

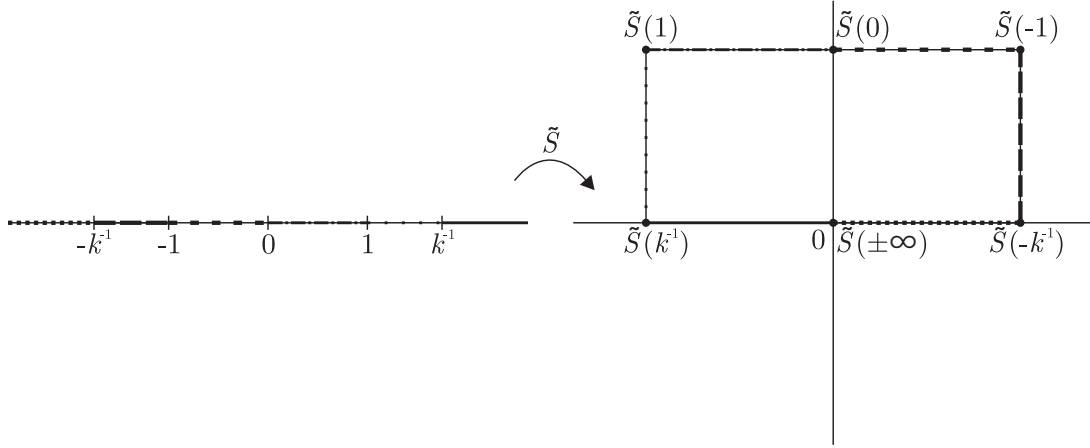


Abbildung 1.14: Die Funktion  $\tilde{S}$  bildet die reelle Achse auf den Rand eines Rechtecks ab.

1. Sei  $z < -\frac{1}{k}$ . Dann sind alle Terme unter der Wurzel negativ und man kann schreiben

$$\tilde{S}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)|^{1/2} \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^4} = \int_{-\infty}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)|^{1/2}}.$$

Da die Wurzel aus den positiven Beträgen reell ist, ist auch das Integral reell und deswegen ist  $\tilde{S}(z)$  für  $z < -\frac{1}{k}$  auf der positiven reellen Achse.

2. Sei  $-\frac{1}{k} < z < -1$ . Dann ist

$$\tilde{S}(z) = \tilde{S}(-k^{-1}) + \int_{-k^{-1}}^z \frac{d\xi}{F(\xi)} = \tilde{S}(-k^{-1}) + \int_{-k^{-1}}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)| \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3} = \tilde{S}(-k^{-1}) + i \int_{-k^{-1}}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)|}.$$

Für  $-\frac{1}{k} < z < -1$  bewegt man sich also in positiver imaginärer Richtung vom Punkt  $\tilde{S}(-k^{-1})$  aus.

3. Sei  $-1 < z < 0$ . Dann ist

$$\tilde{S}(z) = \tilde{S}(-1) + \int_{-1}^z \frac{d\xi}{F(\xi)} = \tilde{S}(-1) + \int_{-1}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)| \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2} = \tilde{S}(-1) - \int_{-1}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)|}.$$

Für  $-1 < z < 0$  bewegt man sich in negativer reeller Richtung vom Punkt  $\tilde{S}(-1)$  aus.

Für  $z > 0$  geht man analog vor und erhält das selbe Ergebnis gespiegelt an der imaginären Achse (vgl. Abbildung 1.14). Die reelle Achse wird also auf den Rand eines Rechtecks abgebildet.

#### 1.0.8.14 Beispiel. Strömungsprofil

Bestimme das Strömungsprofil von z.B. Wind, der über eine Kante der Höhe  $a$  streicht. Finde dazu eine konforme Abbildung, in deren Bild das Strömungsprofil einfach zu berechnen ist (vgl. Abbildung 1.15). Mit dem reellen Potential  $\varphi(x, y)$  ist das Geschwindigkeitsfeld gegeben durch  $v = \varphi_x - i\varphi_y$ ,  $v = (a, b)$  mit  $a = \varphi_x$  und  $b = -\varphi_y$ . Der Fluss ist  $\Phi(z) = \varphi + i\psi$ , seine Ableitung liefert das Geschwindigkeitsfeld:  $\Phi'(z) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi = \varphi_x + i\psi_x = \varphi_x - i\varphi_y = v(z)$ .

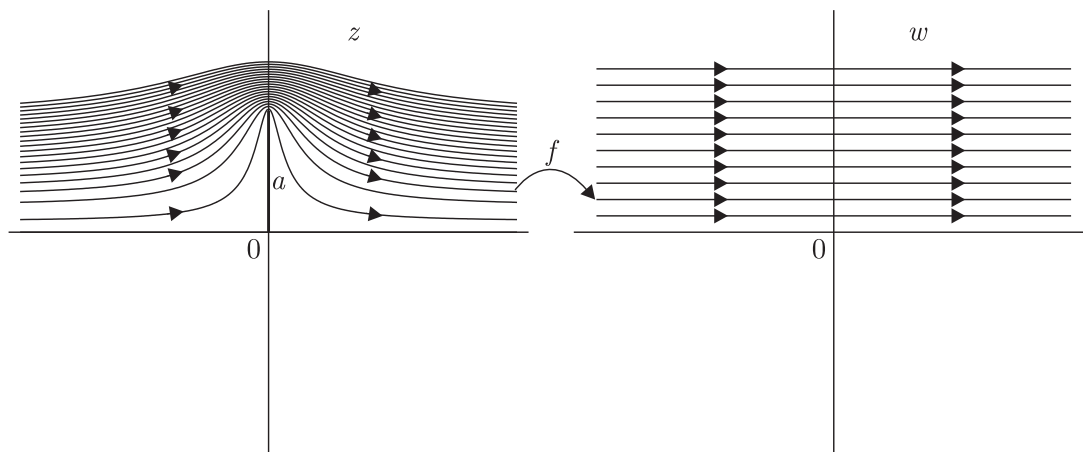
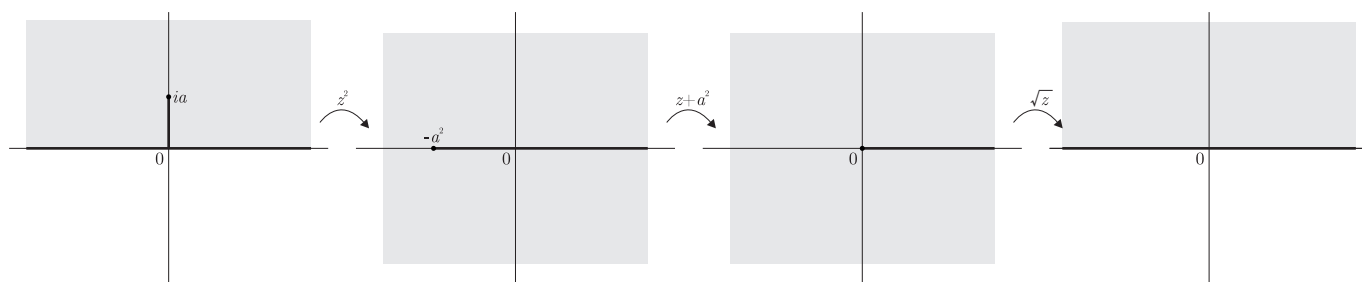


Abbildung 1.15: Strömungsprofil über einer Kante der Höhe  $a$ , vereinfacht dargestellt durch die Abbildung  $f$ .

Man möchte nun einen Fluss der einfachen Form  $\Phi(w) = v_\infty w, w \in \mathbb{C}$  finden. Denn dann ist das Geschwindigkeitsfeld überall konstant,  $v = \Phi'(w) = v_\infty(1 - i0) = v_\infty$ . Verwende folgende Verkettung von Funktionen:



Damit ergibt sich insgesamt  $f(z) = \sqrt{z^2 + a^2} = w$  und der Fluss in Abhängigkeit von  $z$  ist damit  $\Phi(z) = v_\infty w = v_\infty \sqrt{z^2 + a^2}$ . Das Vektorfeld ist dann  $v(z) = \Phi'(z) = v_\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$ .





## 2 Abstecher in die Realität - Stabilität von Atomen

Wir betrachten die Frage, warum Atome stabil sind, die Elektronen also nicht in den Kern fallen. Dazu betrachten wir den Hamiltonoperator des Coulomb-Problems.

$$H = -\Delta - \frac{Z}{|x|} \quad (2.1)$$

Wir betrachten den Grundzustand und zeigen, dass dieser beschränkt ist.

$\psi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{C}$  sei die (normierte) Wellenfunktion und  $\epsilon(\psi)$  die Energie.

$$\epsilon(\psi) = \left\langle \psi \left| -\Delta - \frac{Z}{|x|} \right| \psi \right\rangle = \underbrace{\langle \nabla \psi, \nabla \psi \rangle}_{\|\psi\|_2^2} - \int \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx \quad (2.2)$$

Bevor wir beginnen, eine Erinnerung an die Höldersche Ungleichung, welche für  $p = q = 2$  in die Schwarzsche Ungleichung übergeht.

### 2.0.8.15 Satz. (Höldersche Ungleichung)

Sei  $p > 1$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.3)$$

*Proof.* Wir betrachten zuerst die folgende Ungleichung, die wir aus der Konkavität des Logarithmus erhalten.

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) = \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \underset{\text{konkav}}{\leq} \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \quad (2.4)$$

Nun folgt mit der Monotonie der Exponentialfunktion

$$ab = e^{\ln(ab)} \leq e^{\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \quad (2.5)$$

Seien nun

$$A := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \qquad B := \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q dx. \quad (2.6)$$

$A$  und  $B$  sind offensichtlich größer Null, falls  $f$  und  $g$  stetige und von Null verschiedene Funktionen sind. Mit der vorangegangenen Ungleichung gilt nun

$$\left( \frac{|f(x)|^p}{A} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{|g(x)|^q}{B} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{B}. \quad (2.7)$$

Schließlich liefert die Integration auf beiden Seiten die Höldersche Ungleichung.

$$\frac{1}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \frac{A}{A} + \frac{1}{q} \frac{B}{B} = 1 \quad (2.8)$$

□

### 2.0.8.16 Theorem.

Die Grundzustandsenergie ist beschränkt.

$$\inf \left\{ \epsilon(\psi) \mid \int |\psi|^2 = 1 \right\} \geq -cZ^2 \quad (2.9)$$

### 2.0.8.17 Lemma.

Es gilt

$$\|\nabla\psi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(x)|^2 dx \geq \frac{1}{16} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{16} \|\psi\|_6^2 \quad (2.10)$$

Kurz:

$$\|\nabla\psi\|_2 \geq \frac{1}{4} \|\psi\|_6 \quad (2.11)$$

### Proof. 1. Schritt

Sei  $\psi \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^3)$ :

Behauptung:  $\|\nabla\psi\|_1 \geq \|\psi\|_{\frac{3}{2}} = \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3}}$

$$|\psi(x, y, z)| \leq \int_{-\infty}^x |\partial_{x_1} \psi(x, y, z)| dx_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_{x_1} \psi(x, y, z)| dx_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y, z)| dx_1 \quad (2.12)$$

Selbes Argument geht auch für  $y, z$ !

$$|\psi(x, y, z)|^{\frac{3}{2}} \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x_1, y, z)| dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y_1, z)| dy_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y, z_1)| dz_1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

Damit und mit der Schwarzschen Ungleichung, die wir im zweiten Schritt verwenden erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^{\frac{3}{2}} dx \quad (2.14)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y, z_1)| dz_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y_1, z)| dy_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x_1, y, z)| dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} dx \quad (2.15)$$

$$\leq \left( \iint_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y, z_1)| dz_1 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \iint_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y_1, z)| dy_1 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x_1, y, z)| dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

Diesen Trick wiederholen wir

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^{\frac{3}{2}} dx dy \quad (2.17)$$

$$\leq \left( \iiint_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y, z_1)| dz_1 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \iint_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y_1, z)| dy_1 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \iint_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x_1, y, z)| dx_1 dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

Und schließlich erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x})|^{\frac{3}{2}} d\mathbf{x} = \iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^{\frac{3}{2}} dx dy dz \quad (2.19)$$

$$\leq \left( \iiint_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y, z_1)| dz_1 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \iiint_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y_1, z)| dy_1 dx dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \iiint_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x_1, y, z)| dx_1 dy dz \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

$$= \left( \iiint_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi(x, y, z)| dx dy dz \right)^{\frac{3}{2}} = \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.21)$$

## 2. Schritt

Wir wissen nun, dass  $\int |\nabla \psi| \geq \left( \int |\psi|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}$ . Sei nun  $\psi(x) = |u(x)|^4$ .

$$\int |u|^6 = \int |\psi|^{\frac{3}{2}} = \left( \int_{\mathbb{R}^3} (|u(x)|^4)^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.22)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u(x)||^4 dx = \int_{\mathbb{R}^3} 4 \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^3 |\nabla u(x)| dx \quad (2.23)$$

$$\leq 4 \left( \int |u(x)|^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int |\nabla |u(x)||^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

Im letzten Schritt verwendeten wir wieder die Schwarzsche Ungleichung. Wir dividieren nun durch die erste Klammer im letzten Schritt

$$\left( \int |u|^6 dx \right)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} \leq 4 \left( \int |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

$$\left( \int |u(x)|^6 dx \right)^{\frac{1}{6}} \leq 4 \|\nabla u\|_2 \quad (2.26)$$

Also haben wir gezeigt, dass

$$\|u\|_6 \leq 4 \|\nabla u\|_2 \quad (2.27)$$

## 3. Schritt

$$\epsilon(\psi) = \int |\nabla \psi(x)|^2 dx - \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx \quad (2.28)$$

$$\geq \frac{1}{16} \|\psi\|_6^2 - \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx \quad (2.29)$$

$$= \frac{1}{16} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^6 dx \right)^{\frac{1}{6}} - \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx \quad (2.30)$$

Wir zerlegen jetzt die Gleichung in einen Term mit  $|x| \leq R$  und einen mit  $|x| > R$ .  $R$  ist noch beliebig.

$$\epsilon(\psi) \geq \frac{1}{16} \|\psi\|_6^2 - \int_{|x| \leq R} \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx - \int_{|x| \geq R} \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx \quad (2.31)$$

$$\geq \frac{1}{16} \|\psi\|_6^2 - \int_{|x| \leq R} \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx - \frac{Z}{R} \quad (2.32)$$

$$\geq \frac{1}{16} \|\psi\|_6^2 - ZR \left( \frac{8\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \|\psi\|_6^2 - \frac{Z}{R} \quad (2.33)$$

$$= \left( \frac{1}{16} - ZR \left( \frac{8\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \|\psi\|_6^2 - \frac{Z}{R} \quad (2.34)$$

Mit der Forderung, dass die große Klammer im letzten Schritt größer als Null ist (verknüpft  $R$  mit  $Z$ !), folgt

$$\epsilon(\psi) \geq -cZ^2 \quad (2.35)$$

Damit ist die Stabilität zumindest für einen Einteilchenkern und ein Elektron gezeigt. Der Fall mit  $N$  Teilchen im Kern und  $M$  Elektronen ist wesentlich schwieriger, liefert aber den mathematischen Grund für die Stabilität der Materie.  $\square$



## 3 Maßtheorie in einer Dimension

In der Mathematik wird das Integral gewöhnlich nicht als Riemann-Integral definiert, sondern als Lebesgue-Integral. Zur Erinnerung die Definition des Riemann-Integrals: Sei die Riemann-integrierbare Funktion  $f(x)$  gegeben. Dann ist das Integral über  $[a, b]$  definiert als

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \sum_i f(x_i)(x_{i+1} - x_i). \quad (3.1)$$

Schon Archimedes berechnete auf diese Weise z.B. den Flächeninhalt des Kreises. Das Problem dieser Definition ist, dass für eine Folge von Funktionen  $f_n \in \mathcal{R}(I)$ , mit  $\int |f_n - f_m| dx \rightarrow 0$ , nicht gegeben ist, dass ein  $f \in \mathcal{R}$  existiert, mit  $f_n \rightarrow f$ .

### 3.0.9 Lebesgue-Integral

Um dies zu vermeiden, wird nicht das Urbild, sondern das Bild der Funktion in Teilgebiete unterteilt. Das Integral wird definiert als die Summe

$$\sum_n(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{n} \mu \left( f^{-1} \left( \left[ \frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right] \right) \right) \quad (3.2)$$

Man beachte, dass der Bruch  $\frac{m}{n}$  auf der rechten Seite die Rolle von  $f(x_i)$  im Riemann-Integral und  $\mu \left( f^{-1} \left( \left[ \frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right] \right) \right)$  die Rolle von  $x_{i+1} - x_i$  übernimmt. Mit der so definierten Reihe, die monoton wachsend und beschränkt und damit auch konvergent ist, kann das Lebesgue-Integral definiert werden.

#### 3.0.9.1 Definition. (Lebesgue-Integral)

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{2^n} (f) \quad (3.3)$$

#### 3.0.9.2 Beispiel.

Sei  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\mu(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ .

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu'(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (3.4)$$

#### 3.0.9.3 Bemerkung.

Die Definition des Integrals wird reduziert darauf, ein geeignetes Maß  $\mu$  zu finden. Im Allgemeinen ist es aber nicht möglich, für alle Mengen einen einzigen Maß zu definieren!

#### 3.0.9.4 Beispiel. (Banach-Tarski-Paradoxon)

In drei oder mehr Dimensionen kann man eine Kugel derart in abzählbare viele (genügend komplizierte) Stücke zerlegen, dass man aus diesen abzählbar vielen Stücken zwei Kugeln mit dem Radius der Ausgangskugel zusammen setzen kann. Das Volumen verdoppelt sich also.

Dieses Paradoxon führt auf die Aussage, dass sich nicht ein einziges Maß für alle Mengen definieren lässt.

#### 3.0.9.5 Bemerkung.

Sofort stellt sich auch die Frage, welche Mengen messbar sind. Welche Eigenschaften sollten  $\mathcal{B}$  (= messbare Mengen) besitzen?

- (a)  $f^{-1}((-\infty, a)), f^{-1}([a, \infty)) = \{x | f(x) \geq a\} = \mathbb{R} \setminus \{f < a\}$  sollten messbar sein.
- (b)  $A \in \mathcal{B}$ , dann sollte auch  $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{B}$  gelten.
- (c) Falls  $f$  stetig ist, dann ist  $f^{-1}((a, b))$  offen. D.h. alle offenen Mengen sollten auch in  $\mathcal{B}$  sein.
- (d) Das Maß der Vereinigung disjunkter Mengen sollte gleich der Summe der Maße der einzelnen Mengen sein:  $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ . Also falls  $\{A_n\} \in \mathcal{B}$  und  $A_n \cap A_k = \{0\}$ . Dann sollte auch  $\bigcup_n A_n \in \mathcal{B}$ .

### 3.0.9.6 Definition. (Borel Menge von $\mathbb{R}$ )

Die Borel Menge von  $\mathbb{R}$  ist die kleinste Menge, die folgende Eigenschaften besitzt (vgl.  $\sigma$ -Algebra).

- (a)  $\mathcal{B}$  ist abgeschlossen unter Komplementbildung, d.h.  $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{B}$ .
- (b)  $\mathcal{B}$  ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen, d.h.  $(A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{B})$ .
- (c)  $\mathcal{B}$  enthält alle offenen Mengen  $((a, b) \in \mathcal{B})$ .

### 3.0.9.7 Bemerkung.

Es gilt  $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}, A \cap B \in \mathcal{B}, A \setminus B \in \mathcal{B}$ . Denn

$$\mathbb{R} \setminus \bigcap_n A_n = \bigcup_n (\mathbb{R} \setminus A_n) \in \mathcal{B} \quad (3.5)$$

Erinnerung:  $A \setminus B = A \cap (\mathbb{R} \setminus B)$ .

$\mathcal{B}$  bekommt man daher ausgehend von  $\mathcal{M} = \{(a, b) | a < b\}$  durch Komplement, Schnitt und Vereinigung.

### 3.0.9.8 Definition. (Lebesgue-Maß)

Sei  $\mathcal{J}$  die Familie aller abzählbarer Vereinigungen von offenen Intervallen und

$$\mu\left(\bigcup_i (a_i, b_i)\right) := \sum_i (b_i - a_i). \quad (3.6)$$

Anschaulich kann man das Maß also als Länge der offenen Intervalle verstehen.

Punkten wird in dieser Definition allerdings noch kein Maß zugeordnet. Auf  $\mathcal{B}$  definiert man daher für  $B \in \mathcal{B}$ :

$$\mu(B) = \inf_{B \in I, I \in \mathcal{J}} \mu(I) \quad (3.7)$$

Das Maß eines Punktes ist also Null.

### 3.0.9.9 Theorem.

Das so definierte Lebesgue-Maß  $\mu$  besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (a)  $\mu(\emptyset) = 0$
- (b) Wenn  $\{A_n\} \subset \mathcal{B}$  und  $A_n \cap A_i = \emptyset$  (also  $\{A_n\}$  Menge disjunkter Mengen), dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n) \quad (3.8)$$

- (c)  $\mu(B) = \inf \{\mu(I) | B \subset I, I \text{ offene Menge}\}$
- (d)  $\mu(B) = \sup \{\mu(C) | C \subset B \text{ und } C \text{ kompakt}\}$

Zu (c) sei erinnert, dass sich jede offene Menge in  $\mathbb{R}$  als abzählbare Vereinigung von Intervallen ausgedrückt werden kann. Denn

$$O \text{ offen} \Rightarrow \forall x \in O \exists I_x = (a_x, b_x) \ni x, I_x \subset O. \quad (3.9)$$

$$O = \bigcup_x I_x \quad (3.10)$$

Es bleibt nun nur noch zu definieren, was es bedeutet, dass eine Funktion messbar ist.

### 3.0.9.10 Definition. (messbare Funktion)

Eine Funktion heißt Borel-Funktion bzw. messbar  $\Leftrightarrow f^{-1}(B)$  ist eine Borel Menge.

### 3.0.9.11 Satz.

$f$  Borel-Funktion  $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}$  gilt, dass  $f^{-1}[B] \in \mathcal{B}$ .

### 3.0.9.12 Satz.

Für Borel-Funktionen gelten die folgenden Eigenschaften.

- (a) Wenn  $f, g$  Borel-Funktionen sind, sind auch  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\max\{f, g\}$  und  $\min\{f, g\}$  Borel-Funktionen.
- (b) Wenn  $f_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) Borel-Funktionen sind und  $f_n \rightarrow f$ , dann ist auch  $f$  Borel-Funktion.

*Proof.* zu (b)

Es gilt auch, dass  $\sup_n \{f_n(x)\}$  und  $\inf_n \{f_n(x)\}$  Borel-Funktionen sind.

$$\left\{x \mid \sup_n f_n > a\right\} = \bigcup_n \underbrace{\{f_n > a\}}_{\text{Borel}} \in \mathcal{B} \quad (3.11)$$

$$\left\{x \mid \inf_n f_n > a\right\} = \bigcap_n \underbrace{\{f_n \geq a\}}_{\text{Borel}} \in \mathcal{B} \quad (3.12)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{k \geq 1} \sup_{n \geq k} a_n \quad (3.13)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{falls} \quad f_n \rightarrow f \quad (3.14)$$

Da die linke Seite Borel-Funktionen sind, ist es auch  $f$ . □

### 3.0.9.13 Beispiel.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in I \end{cases} \quad \text{ist nicht Riemann-integrierbar aber Lebesgue-integrierbar.}$$

### 3.0.9.14 Definition. (Lebesgue-integrierbar)

Eine Funktion ist Lebesgue-integrierbar, genau dann wenn  $\int |f| dx < \infty$ .

Das Integral über den Betrag wird dabei in negativen und positiven Teil zerlegt.

$$\int |f| dx = \int f_+ - \int f_- \quad f_+ = \max\{0, f(x)\}, \quad f_- = -\min\{0, f(x)\} \quad (3.15)$$

Die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \{f \mid \int |f| dx < \infty\} \quad (3.16)$$

### 3.0.9.15 Theorem.

Seien  $f, g$ , messbar.

- (a)  $f, g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}^1$
- (b)  $|g| < f$  und  $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow g \in \mathcal{L}^1$
- (c)  $|\int f dx| \leq \int |f| dx$
- (d)  $f \leq g \Rightarrow \int f dx \leq \int g dx$
- (e)  $|\int_a^b f dx| \leq |b - a| \cdot \sup |f(x)|$  wenn  $f$  stetig.

**3.0.9.16 Theorem.**

$f_n(x) \geq 0$  messbar und  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x$ .  $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \forall x$ ,  $f_n \uparrow f$ . Wenn  $\int |f_n(x)| dx \leq C$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f_k(x) dx = \int_R f(x) dx \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R |f_n - f| dx = 0. \quad (3.17)$$

**3.0.9.17 Beispiel.**

Betrachten wir eine Funktionenfolge wie in Abbildung 3.1, mit  $f_n(x) = f_0(x - 2n)$ .

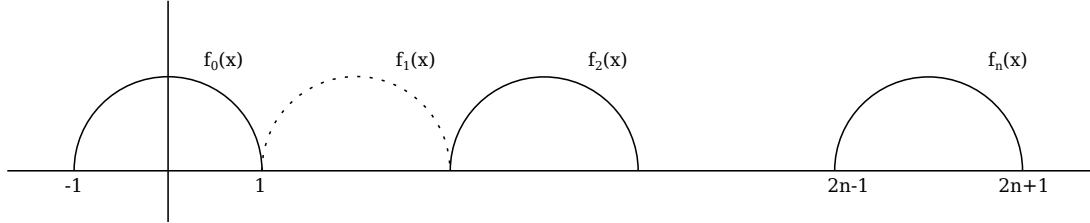


Abbildung 3.1: Funktionenfolge, deren Funktionen sich nicht überlappen.

Punktweise konvergiert die Folge gegen die Nullfunktion  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ . D.h. auch das Integral darüber verschwindet. Nehmen wir  $f_0$  als Halbkreis an, dann gilt

$$\frac{\pi}{2} = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0. \quad (3.18)$$

**3.0.9.18 Lemma. (Lemma von Fatou)**

Sei  $f_n$  Folge von messbaren Funktionen.  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Dann gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \quad (3.19)$$

*Proof.* Sei  $F^k(x) = \inf_{n \geq k} f_n(x)$ ,  $F^k(x)$  monoton wachsend.

$$\liminf_n \int f_n = \sup_{k \geq 1} \inf_{n \geq k} \int f_n \geq \sup_{k \geq 1} \int \inf_{n \geq k} f_n = \sup_{k \geq 1} \int F^k = \int F(x) dx = \int f(x) dx \quad (3.20)$$

□

**3.0.9.19 Theorem. (Satz von der dominierten Konvergenz)**

Sei  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  und  $|f_n(x)| \leq G(x)$  mit  $\int G < \infty$ .

Dann ist  $f \in \mathcal{L}^1$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| dx = 0. \quad (3.21)$$

Außerdem gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n. \quad (3.22)$$

*Proof.*  $f_n \geq 0$ .

$$\lim \int f_n \geq \int f \quad (3.23)$$

$$\lim \int (G - f_n) \geq \int (G - f) \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow \lim \int f_n \leq \int f \Rightarrow \lim \int f_n = \int f \quad (3.25)$$

□



### 3.0.9.20 Definition.

$$f, g \text{ sind äquivalent} \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f - g|(x) dx = 0 \Leftrightarrow f = g \text{ fast überall.} \quad (3.26)$$

### 3.0.9.21 Definition.

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  ist die Menge der Äquivalenzklassen.

### 3.0.9.22 Bemerkung.

Der Funktionswert an einem einzelnen Punkt  $f(x)$  bedeutet NIX!

### 3.0.9.23 Theorem. (Riese-Fischer)

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  ist vollständig.

*Proof.* Die Einsnorm ist  $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f|(x) dx$ . Sei  $f_n$  Cauchy,  $\|f_n - f_m\|_1 \rightarrow_{n,m \rightarrow \infty} 0$ .

Es ist zu zeigen, dass  $\exists f$  mit  $f \in \mathcal{L}^1$  und  $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ .

Es genügt zu zeigen, dass es eine Teilfolge  $f_n$  gibt (Achtung: Notation gleich wie Folge, aber nicht gleich!), mit  $f_n$  so, dass  $\|f_n - f_{n+1}\| \leq 2^{-n}$ .

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^m |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \quad (3.27)$$

$$g_m \uparrow g_{\infty}(x) \quad (3.28)$$

$$\|g_m\| \leq \sum_{n=1}^m \|f_n - f_{n+1}\| \leq \sum_{n=1}^m 2^{-n} < 1 \Rightarrow g_{\infty} \in \mathcal{L}^1 \quad (3.29)$$

$$f_m(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{m-1} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) =: S_m(x) \quad (3.30)$$

$$S_m(x) \text{ ist absolut konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|(x) \text{ ist konvergent} \quad (3.31)$$

$$\Rightarrow \exists f(x) \quad S_m(x) \rightarrow f(x) \quad (3.32)$$

$$|f_m(x)| \leq |f_1(x)| + g_{\infty}(x) \Rightarrow \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \quad (3.33)$$

□

### 3.0.9.24 Bemerkung.

Im 1-d sind Masse allgemein von der Form  $d\alpha$ , mit  $\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ .

$$\mu((a.b)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\alpha(b - \epsilon) - \alpha(a + \epsilon)) \quad (3.34)$$

Für das Lebesgue-Maß gilt einfach

$$\alpha_{\text{Lebesgue}}(x) = x. \quad (3.35)$$