Mathematik für Physiker IV

Lernzielkontrolle

Name

Vorname

Matrikelnr.

Bitte verwende diese Seite als Deckblatt deiner Arbeit, und lasse die untenstehende Tabelle zur späteren Bewertung frei.

Aufgabe	Maximalpunktzahl	maximale Bonuspunkte	erzielte Punkte
1	9	0	
2	12	0	
3	10	0	
4	10	0	
5	10	0	
6	9	0	
Total	60	0	

Hinweise

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Bitte beachte folgende Punkte:

- Trage **jetzt** deinen Namen in das Deckblatt ein und gib es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt deiner Arbeit ab.
- Der Herleitungsweg von Resultaten muss übersichtlich und vollständig sein. Die Antworten müssen begründet werden.

Aufgabe 1: (9P)
Berechne
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2: (12P)

a) Sei $g(z) = \int_{|t|=2} \frac{t^2-2t+1}{t-z}\mathrm{d}t$. Berechne $g'(1+i)$.

b) Berechne
$$\int_{|z|=8} \frac{1}{\sin(z)}\mathrm{d}z.$$

c) Berechne $\int_{|z|=1} \overline{z}\mathrm{d}z$.

Aufgabe 3: (10P)
Berechne
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4: (10P)
Betrachte für $a, b > 0$ den Limes
$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-iaz}}{z^2-b^2+i\varepsilon}\mathrm{d}z.$$

a) Skizziere die Lage (Quadrant) der Pole des Integranden in der komplexen Ebene.

b) Berechne den Limes.

Aufgabe 5: (10P) Die folgenden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig:

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph bis auf eine Polstelle erster Ordnung in $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass gilt
$$|f(z)| \leq \frac{1}{1+|z|^2}, \qquad \text{für } \mathrm{Im}(z) \geq 0, |z-x_0| \geq 1.$$
Zeige, dass für den Chauchyschen Hauptwert (principal value) gilt
$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left[\int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x\right] = i\pi \mathrm{Res}_{z=x_0}(f).$$

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz (holomorph auf ganz $\mathbb{C}$). Zeige: Hat $|f|$ in z_0 ein lokales Minimum, so ist $f(z_0) = 0$ oder f konstant.

Aufgabe 6: (9P)
Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante, holomorphe Funktion, wobei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen ist und
$$U \supseteq \mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C}\big||z| \leq 1\big\}.$$

a) Nehme an, dass $|f(z)| = 1$ für alle z mit $|z| = 1$.
   i) Zeige mittels Maximum-Prinzip, dass f in $\mathbb{D}$ eine Nullstelle hat.
   ii) Verwende a)i), um zu zeigen, dass das Bild von f die Einheitsscheibe $\mathbb{D}$ enthält,
$$f(U) \supseteq \mathbb{D}.$$

b) Zeige: Wenn $|f(z)| \geq 1$ für alle z mit $|z| = 1$ und ein Punkt $z_0 \in \mathbb{D}$ existiert, so dass $|f(z_0)| < 1$, dann enthält das Bild von f die Einheitsscheibe $\mathbb{D}$.