Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2009
20.10.2009
Blatt 1

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei X ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$. Zeigen Sie, dass die Kugel $B(x;r) \subset X$ eine offene Teilmenge von X ist.

2. Sei X eine beliebige Menge. Definiert man $A \subseteq X$ als abgeschlossen, wenn A endlich ist oder $A = X$, so zeige man, dass dies eine Topologie (auch *cofinite Topologie* genannt) auf X definiert.

3. Bestimmen Sie alle möglichen Topologien auf einer dreielementigen Menge, die paarweise nicht homöomorph zueinander sind.

4. Sei $\mathbf{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen. Wir definieren für $a, b \in \mathbf{Z}$ und $b > 0$,

$$N_{a,b} := \{a + nb : n \in \mathbf{Z}\}.$$

   (a) Wir nennen $O \subseteq \mathbf{Z}$ offen, falls zu jedem $a \in O$ ein $b > 0$ existiert, so dass $N_{a,b} \subseteq O$. Zeigen Sie, dass $\tau := \{O \subseteq \mathbf{Z} : O \text{ offen}\}$ eine Topologie auf $\mathbf{Z}$ definiert.

   (b) Zeigen Sie, dass jede Menge $N_{a,b}$ auch abgeschlossen ist.

   (c) Zeigen Sie durch einen topologischen Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. (Hinweis: Nehmen Sie an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Zeigen Sie dann mit (b), dass $\mathbf{Z} \setminus \{-1, 1\}$ eine abgeschlossene Menge sein muss, also $\{-1, 1\}$ offen. Führen Sie das zum Widerspruch indem Sie zeigen, dass diese Menge nicht offen sein kann.)

Abgabe: Mittwoch, 28. Oktober 2009, 9 Uhr