Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Panagiotis Konstantis

WS 2009/10
13.01.2010
Blatt 10

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei $g \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{F}_g$ die geschlossene, orientierte Fläche vom Geschlecht g. Berechnen Sie die Abelianisierung $\pi_1(\mathbb{F}_g)^{\mathrm{ab}}$ und zeigen Sie damit: Ist $g \neq g'$, so ist $\mathbb{F}_g \not\cong \mathbb{F}_{g'}$.

2. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Potenzfunktion $\mathrm{pot}_n\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^n$, eine n-blättrige Überlagerung ist. (Hinweis: Verwenden Sie geeignete Zweige der n-ten Wurzel.)

   (b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Projektion $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ eine 2-blättrige Überlagerung ist. (Hinweis: Verwenden Sie den Standardatlas $(U_0, \dots, U_n)$ von $\mathbb{P}^n$ mit $(i = 0, \dots, n)$
   $$U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n : \ x_i \neq 0\}.)$$

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiere auf $X = \mathbb{R}^n$ durch Translationen, $\gamma.x = x + \gamma$ (für $\gamma \in \Gamma$ und $x \in X$). Zeigen Sie, dass diese Operation eigentlich diskontinuierlich ist und $\mathrm{ex}^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ einen Homöomorphismus von $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ nach $\mathbb{T}^n$ induziert.

4. Sei $p \in \mathbb{N}$ und $\Gamma = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega^p = 1\} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln. Sei weiter $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu p und $1 \leq q < p$. Zeigen Sie, dass Γ wie folgt auf $X = \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ eigentlich diskontinuierlich operiert,
   $$\omega^k.(z_1, z_2) = (\omega^k z_1, \omega^{kq} z_2)$$
   $(k = 0, \dots, p-1)$.

Abgabe: Mittwoch, 20. Januar 2010, 9.00 Uhr