Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2009/2010
20.01.2010
Blatt 11

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine reguläre Überlagerung. Wir nennen $\pi'\colon (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ eine Teilüberlagerung von π, wenn es einen Überlagerungsmorphismus $f\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}_0', \tilde{x}_0')$ mit $\pi' \circ f = \pi$ gibt. Einer solchen Teilüberlagerung π' ordnen wir nun die Untergruppe $\Phi(\pi') := \Gamma' := \operatorname{Deck}(\tilde{X}, \tilde{X}')$ von $\Gamma := \operatorname{Deck}(\tilde{X}, X)$ zu und umgekehrt jeder Untergruppe Γ' von Γ die Teilüberlagerung $\Psi(\Gamma') = \pi'$, die von der kanonischen Projektion $f\colon \tilde{X} \to \tilde{X}/\Gamma =: \tilde{X}'$ induziert wird.
   (a) Zeigen Sie, dass Φ und Ψ invers zueinander sind.
   (b) Zeigen Sie, dass π' genau dann regulär ist, wenn $\Gamma' = \Phi(\pi')$ ein Normalteiler von Γ ist.

2. Zeigen Sie, dass $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = (1)$ ist. (Hinweis: Betrachten Sie die kanonische Projektion $\pi\colon \mathbb{C}_*^{n+1} := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass sich Kurven von $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}_*^{n+1}$ liften lassen und verbinden Sie Anfangspunkt und Endpunkt des Liftes innerhalb der Faser. Zeigen Sie schließlich, dass diese geschlossene Kurven nullhomotop sind.)

3. Sei K die Kleinsche Flasche. Berechnen Sie $\pi_1(K)$. (Hinweis: Schreiben Sie K als $\mathbb{R}^2/\Gamma$ für eine geeignete Gruppenwirkung Γ auf $\mathbb{R}^2$.)

4. (a) Sei $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung und $k \geq 2$. Zeigen Sie, dass $\pi_*\colon \pi_k(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_k(X, x_0)$ einen Isomorphismus zwischen den entsprechenden k–ten Homotopiegruppen induziert.
   (b) Zeigen Sie: $\pi_k(\mathbb{T}^n) = (0)$, für alle $k \geq 2$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe: Mittwoch, 27. Januar 2010, 9 Uhr