Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2009/2010
27.01.2010
Blatt 12

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Zeigen Sie:
   (a) Spaltet die kurze exakte Sequenz, so ist $B \cong A \oplus C$.
   (b) Ist C eine freie abelsche Gruppe, so spaltet die kurze exakte Sequenz.

2. Sei $0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen und $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: $\partial_*\colon H_k(C'') \to H_{k-1}(C')$, $\partial_*([z'']) = f_{k-1}^{-1}(\partial_k(g_k^{-1}([z''])))$ ist wohldefiniert und ein Homomorphismus.

3. Sei $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Beweisen Sie die Exaktheit der zugehörigen langen Homologiesequenz an den Stellen $H_k(C)$ und $H_k(C'')$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

4. Sei $C = (C_k, \partial_k)$ ein nicht–negativer Kettenkomplex. Eine *Augmentierung* von C ist ein surjektiver Homomorphismus $\varepsilon\colon C_0 \to \mathbb{Z}$ mit $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$. Der *reduzierte Kettenkomplex* eines *augmentierten Kettenkomplexes* (C, ε) ist der Teilkomplex $\tilde{C} \subseteq C$ mit $\tilde{C}_k := C_k$ für $k \geq 1$ und $\tilde{C}_0 := \ker(\varepsilon)$. Man setzt $\tilde{H}(C) := H(\tilde{C})$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} H_0(C) &\cong \tilde{H}_0(C) \oplus \mathbb{Z}, \\ H_k(C) &\cong \tilde{H}_k(C) \text{ für k} \geq 1 \end{aligned}$$

Abgabe: Mittwoch, 3. Februar 2010, 9 Uhr