Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Panagiotis Konstantis

WS 2009/10
03.02.2010
Blatt 13

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Ein Kettenkomplex C heißt *(ketten-) zusammenziehbar*, wenn die Identität id_C auf C (ketten-) homotop zur Nullabbildung 0_C ist, $\mathrm{id}_C \simeq 0_C$. Zeigen Sie, dass für einen zusammenziehbaren Komplex C sämtliche Homologiegruppen verschwinden (man sagt: C ist *azyklisch*), $H_k(C) = (0)$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

2. Sei $C = (C_k, \partial_k)$ ein Kettenkomplex und $C' \subseteq C$ ein Unterkomplex. Der *Quotientenkomplex* C/C' ist definiert durch
$$(C/C')_k := C_k/C'_k$$
und $\partial([c]) := [\partial c]$.
   (a) Zeigen Sie, dass ∂ auf C/C' wohldefiniert ist und C/C' tatsächlich zu einem Kettenkomplex macht.
   (b) Zeigen Sie, dass die kanonische Projektion $\pi = (\pi_k)$, $\pi_k\colon C_k \to C_k/C'_k$, eine Kettenabbildung ist, die zusammen mit der Inklusion $i\colon C' \to C$ die folgende Sequenz zwischen Kettenkomplexen exakt werden lässt:
$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} C/C' \longrightarrow 0.$$
   (c) Zeigen Sie: Sind zwei der Komplexe C, C', C/C' azyklisch, so auch der dritte.

3. Sei ε eine Augmentierung eines nicht-negativen Kettenkomplexes C (vgl. Aufgabe 4, Blatt 12). Sei $\underline{\mathbb{Z}}$ der Kettenkomplex, der an der Stelle $k = 0$ aus $\mathbb{Z}$ besteht und sonst überall aus der Nullgruppe. Zeigen Sie:
   (a) Eine Augmentierung ε von C kann als eine surjektive Kettenabbildung von C nach $\underline{\mathbb{Z}}$ aufgefasst werden (und umgekehrt).
   (b) Ist $\varepsilon\colon C \to \underline{\mathbb{Z}}$ eine *Kettenäquivalenz* (d.h.: es gibt eine Kettenabbildung $\tau\colon \underline{\mathbb{Z}} \to C$ mit $\varepsilon \circ \tau \simeq \mathrm{id}_{\underline{\mathbb{Z}}}$ und $\tau \circ \varepsilon \simeq \mathrm{id}_C$), so ist der reduzierte Kettenkomplex zusammenziehbar (vgl. Aufgabe 1).

4. Sei X ein topologischer Raum, $S(X)$ sein singulärer Kettenkomplex und $\varepsilon\colon S(X) \to \underline{\mathbb{Z}}$ gegeben auf den singulären 0-Simplexen (also den Punkten von X) durch $\varepsilon(x) = 1$, $x \in X$.
   (a) Zeigen Sie, dass ε eine Augmentierung von $S(X)$ ist (vgl. Aufgabe 4, Blatt 12 und Aufgabe 3), wenn X nicht-leer ist.
   (b) Zeigen Sie, dass für die *reduzierte Homologie* $\tilde{H}(X)$ (vgl. Aufgabe 4, Blatt 12) gilt: $\tilde{H}_0(X) = 0$ genau dann, wenn X wegzusammenhängend ist.

Abgabe: Mittwoch, 10. Februar 2010, 9.00 Uhr