Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
P. Konstantis

WS 2009/2010
10.02.2010
Blatt 14

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei X ein zusammenziehbarer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass sein reduzierter singulärer Kettenkomplex (vgl. Blatt 13, Aufgabe 4 und Blatt 12, Aufgabe 4) zusammenziehbar ist.

2. Sei X ein topologischer Raum, Δ_1 und Δ_2 die Standard–Simplexe in den Dimensionen $k = 1$ und $k = 2$ und $\alpha\colon \Delta_1 \to X$ ein singulärer 1–Simplex. Sei weiter $\alpha^-\colon \Delta_1 \to X$ der rückwärts durchlaufene 1–Simplex, d.h. $\alpha^-(\lambda_0, \lambda_1) = \alpha(\lambda_1, \lambda_0)$, für alle $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) \in \Delta_1$. Zeigen Sie, dass die Differenz $c_1 = \alpha^- - \alpha$ in $S_1(X)$ ein singulärer Rand ist, also $\alpha^- - \alpha = \partial_2(c_2)$, für eine singuläre 2–Kette $c_2 \in S_2(X)$. (Hinweis: Betrachten Sie das singuläre 2–Simplex $\sigma\colon \Delta_2 \to X$ gegeben durch $\sigma(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \alpha(\lambda_2, \lambda_0 + \lambda_1)$.)

3. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Teilraum. Der Quotientenkomplex (vgl. Blatt 13, Aufgabe 2) $S(X, A) := S(X)/S(A)$ der singulären Kettenkomplexe von X bzw. A heißt der *singuläre Kettenkomplex des Raumpaares* (X, A). Bezeichnet $i\colon S(A) \to S(X)$ die Inklusion und $\pi\colon S(X) \to S(X, A)$ die kanonische Projektion, so zeigen Sie, dass es eine lange exakte Homologiesequenz (des Raumpaares (X,A)) wie folgt gibt:
$$\ldots \xrightarrow{\pi_*} H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{\pi_*} H_k(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \ldots$$

4. Beweisen Sie mit Hilfe des Lemmas über kleine Ketten den *Ausschneidungssatz* der (singulären) Homologietheorie: Ist X ein topologischer Raum, $A \subset X$ ein Teilraum und $U \subset A$ derart, dass $\bar{U}$ im Inneren von A liegt, so induziert die Inklusion von Raumpaaren $i\colon (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ einen Isomorphismus in der Homologie,
$$i_*\colon H(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H(X, A).$$

Abgabe: Mittwoch, 17. Februar 2010, 9 Uhr