Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Panagiotis Konstantis

WS 2009/10
17.02.2010
Blatt 15

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein Teilraum und $i\colon A \to X$ die Inklusion. Zeigen Sie (für jedes $k \in \mathbb{N}_0$):
   (a) Ist $A \subseteq X$ ein Retrakt, so ist $i_*\colon H_k(A) \to H_k(X)$ injektiv.
   (b) Ist $A \subseteq X$ ein Deformationsretrakt, so ist i_* sogar ein Isomorphismus.

2. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Homologie eines Buketts von n Kreislinien $X = \mathbb{S}^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}^1$ (n-mal), insbesondere die Homologie der Figur Acht ($n = 2$).
   (b) Sei $g \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{F}_g$ die geschlossene, orientierte Fläche vom Geschlecht g. Berechnen Sie die Homologie von $\mathbb{F}_g$, insbesondere die des 2-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^2$ ($g = 1$).

3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathrm{pot}_n\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^n$.
   (a) Zeigen Sie, dass der Abbildungsgrad von pot_n nach der Definition aus §9 der Vorlesung gerade n ist.
   (b) Zeigen Sie nun, dass die Definitionen nach §4 und §9 der Vorlesung für den Abbildungsgrad einer stetigen Abbildung $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ äquivalent sind.

4. (a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ gerade. Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ einen Fixpunkt oder einen Antipodenpunkt hat.
   (b) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade. Geben Sie eine stetige Abbildung $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ohne Fix- und Antipodenpunkte an.

Abgabe: keine mehr