Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2009/2010
4.11.2009
Blatt 3

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei $n \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ wegzusammenhängend ist.

2. Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$.

   (a) Ein Punkt $x \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, wenn M eine Umgebung von x ist. Die Menge $\overset{\circ}{M} := \{x \in M : x \text{ ist ein innerer Punkt}\}$ heißt das *Innere von M*. Zeigen Sie, dass $\overset{\circ}{M}$ die größte offene Menge ist, die in M enthalten ist, also

   $$\overset{\circ}{M} = \bigcup \{U \subseteq M : U \text{ offen}\}.$$

   (b) Ein Punkt $x \in X$ heißt *Randpunkt von M*, wenn x Berührpunkt von M und $X \setminus M$ ist. Zeigen Sie, dass die Menge ∂M der Randpunkte von M abgeschlossen ist und $\overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$ ist.

3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$.

   (a) Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{S}^n$: für $x, y \in \mathbb{S}^n$ gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $x = -y$ oder $x = y$ ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^n / \sim$ homöomorph zu $\mathbb{P}^n$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^n$ ein kompakter, zusammenhängender topologischer Raum ist.

4. Zeigen Sie, dass die Einhängung der $\mathbb{S}^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ homöomorph zu $\mathbb{S}^{n+1}$ ist: $S(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^{n+1}$.

Abgabe: Mittwoch, 11. November 2009, 9 Uhr