Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2009/2010
18.11.2009
Blatt 5

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei $\alpha \in [0, 2\pi]$. Zeigen Sie, dass die Rotation $\mathrm{rot}_\alpha \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ um den Winkel α, $z \mapsto e^{i\alpha} z$ homotop zur Identität ist.

2. Für zwei stetige Abbildungen $f, g \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sei $fg \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $fg(z) := f(z)g(z)$ (Multiplikation komplexer Zahlen).

   (a) Für $[f], [g] \in [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ definieren wir eine Verknüpfung $+$ auf $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ durch $[f] + [g] := [fg]$. Zeigen Sie: $+$ ist wohldefiniert und $([\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1], +)$ ist eine Gruppe.

   (b) Zeigen Sie, dass $([\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1], +)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$ ist. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ ist.)

3. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass eine stetige Abbildung $f \colon \mathbb{S}^n \to X$ genau dann nullhomotop ist, wenn es eine stetige Fortsetzung $F \colon \mathbb{B}^{n+1} \to X$ von f gibt, also F stetig und $F|_{\mathbb{S}^n} = f$.

4. Zeigen Sie: Ist $f \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, dann existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $f(z) = z^n$ ist.

Abgabe: Mittwoch, 25. November 2009, 9 Uhr