Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2009/2010
25.11.2009
Blatt 6

# Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{GL}(n)$ die Gruppe der reellen invertierbaren $n \times n$–Matrizen und mit $\mathrm{O}(n)$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen, also alle relle $n \times n$–Matrizen $A$ mit $AA^T = 1$. Ferner versehen wir $\mathrm{GL}(n)$ und $O(n)$ mit der Teilraumtopologie des $\mathbb{R}^{n^2}$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n)$ offen und $\mathrm{O}(n)$ kompakt ist.
   (b) Zeigen Sie, dass die Matrizenmultiplikation, sowie die Invertierung von Matrizen stetige Abbildungen sind.
2. Zeigen Sie, dass die dreifach punktierte 2–Sphäre den Homotopietyp der Acht hat, $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, p_2, p_3\} \cong \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. (Hinweis: *Proof by picture* ist ausreichend.)
3. Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^1 \subset \mathbb{B}^2$, dann existiert ein $x \in \mathbb{B}^2$ mit $f(x) = 0$. (Hinweis: Satz von Borsuk–Ulam).
4. Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(n)$ ein Deformationsretrakt von $\mathrm{GL}(n)$ ist.

**Abgabe: Mittwoch, 2. Dezember 2009, 9 Uhr**