Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2009/2010
2.12.2009
Blatt 7

Übungen zu „Algebraische Topologie"

Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Wir definieren die *reduzierte Einhängung* ΣX von X durch den Quotienten

$$\Sigma X := X \times [0,1]/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times [0,1]).$$

mit $[(x_0, t)]$ als Basispunkt.

1. Definieren Sie für jedes stetige $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ein stetiges $\Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma Y$ derart, dass Σ zu einem Funktor von $\mathbf{Top}_0$ auf sich wird.

2. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0 : \Sigma\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{n+1}$, wo $\mathbb{S}^n$ den kanonischen Einheitsvektor $\mathbf{1} = (1, 0, \ldots, 0)$ als Basispunkt hat. (Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^{n+1}$,
$$\Phi(x,t) := \begin{cases} (2tx + (1-2t)\mathbf{1}, \sqrt{1 - ||2tx + (1-2t)\mathbf{1}||^2}), & 0 \le t \le 1/2 \\ ((2-2t)x + (2t-1)\mathbf{1}, -\sqrt{1 - ||(2-2t)x + (2t-1)\mathbf{1}||^2}), & 1/2 \le t \le 1.) \end{cases}$$

3. Für einen punktierten topologischen Raum (X, x_0) und $n \ge 1$ definieren wir die *n–te Homotopiegruppe* $\pi_n(X, x_0)$ wie folgt: Sei $\mathcal{C}(\mathbb{S}^n, X)$ die Menge der stetigen Abbbildungen $f\colon \mathbb{S}^n \to X$, so dass $f(\mathbf{1}) = x_0$ ist. Für $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^n, X)$ sei $f \sim g$ die Äquivalenzrelation gegeben dadurch, dass es eine Homotopie relativ $\{\mathbf{1}\}$ zwischen f und g existiert. Setze schließlich $\pi_n(X, x_0) := \mathcal{C}(\mathbb{S}^n, X)/\sim$. Für $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^n, X)$ definieren wir $f * g\colon \mathbb{S}^{n-1} \times [0,1] \to X$ durch
$$(f * g)(x,t) := \begin{cases} f(\Phi(x, 2t)), & 0 \le t \le 1/2 \\ g(\Phi(x, 2t-1)) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$
für das Φ aus Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass dadurch eine Abbildung $f * g$ von $\mathbb{S}^n$ nach X induziert wird. Zeigen Sie ferner, dass durch $[f] * [g] := [f * g]$ eine Verknüpfung auf $\pi_n(X, x_0)$ definiert wird, so dass $(\pi_n(X, x_0), *)$ eine Gruppe wird.

4. Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass $\pi_n(X, x_0)$ abelsch ist für alle $n > 1$. (Hinweis: Nach Aufgabe 2 gibt es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{S}^{n-2} \times [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^n$. Betrachten Sie die Homotopie auf dem Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ und lassen Sie den Faktor $\mathbb{S}^{n-2}$ fest. Skizzieren Sie die Homotopie im Quadrat und begründen Sie, warum Sie diese auf $\mathbb{S}^n$ runterdrücken können.)

Abgabe: Mittwoch, 9. Dezember 2009, 9 Uhr