Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2009/2010
9.12.2009
Blatt 8

Übungen zu „Algebraische Topologie“

Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ Kategorien und $T, S\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ Funktoren. Eine *natürliche Transformation* Φ von S nach T ordnet jedem Objekt X aus $\mathcal{C}_1$ einen Morphismus $\Phi_X \in \operatorname{Mor}(S(X), T(X))$ zu, so dass für alle $f \in \operatorname{Mor}(X, Y)$ mit X, Y Objekte aus $\mathcal{C}_1$ gilt:

$$\Phi_Y \circ S(f) = T(f) \circ \Phi_X.$$

1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ist X ein Objekt aus $\mathcal{C}$, dann sei $V_X^{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ gegeben durch $V_X^{\mathcal{C}}(Y) := \operatorname{Mor}(X, Y)$ als Menge in **Ens** und für $f \in \operatorname{Mor}(Y, Z)$ setzen wir $V_X^{\mathcal{C}}(f)(g) := f \circ g$, wo $\circ$ die Komposition in der Kategorie $\mathcal{C}$ ist.
   (a) Zeigen Sie: $V_X^{\mathcal{C}}$ ist ein Funktor.
   (b) Setze $V_1(X, x_0) := V_{(\mathbb{S}^1, \mathbf{1})}^{\mathbf{HTop}_0}(X, x_0)$ als Funktor von $\mathbf{HTop}_0$ nach **Ens** und $V_2(X, x_0) := V_{\mathbb{S}^1}^{\mathbf{HTop}}(X)$ ebenfalls als Funktor von $\mathbf{HTop}_0$ nach **Ens**. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Transformation zwischen V_1 und V_2 gibt.
2. (a) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X_1 und X_2 seien Objekte aus $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass das Produkt (X, p_1, p_2) von X_1 und X_2, falls es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig ist.
   (b) Bestimmen Sie das Produkt und die Summe in der Kategorie **Ab**.
3. (a) Sei A eine Menge, G ein Gruppe, $f\colon A \to G$ eine Abbildung und $\iota_A\colon A \to F(A)$ die Abbildung, die $a \in A$ das einbuchstabige Wort $\iota_A(a)$ in $F(A)$ zuordnet. Zeigen Sie, dass es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{f}\colon F(A) \to G$ gibt, so dass $f = \tilde{f} \circ \iota_A$ ist.
   (b) Seien A und B Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es genau einen Gruppenhomomorphismus $f_*\colon F(A) \to F(B)$ gibt mit der Eigenschaft
   $$f_* \circ \iota_A = \iota_B \circ f,$$
   wo $\iota_A\colon \to F(A)$ und $\iota_B\colon B \to F(B)$ die entsprechenden Abbildungen aus Teilaufgabe (a) sind.
4. Zeigen sie, dass $\langle\{ab\}\rangle \subseteq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ ein Normalteiler ist, wo $a \in \mathbb{Z}_2$ und $b \in \mathbb{Z}_2$ die Erzeuger der Gruppe $\mathbb{Z}_2$ sind.

Abgabe: Mittwoch, 16. Dezember 2009, 9 Uhr