Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2009/2010
16.12.2009
Blatt 9

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Zeigen Sie, dass der projektive Raum $\mathbb{P}^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) eine topologische Mannigfaltigkeit ist. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $U_i := \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$, $i = 0, \ldots, n$, offen in $\mathbb{P}^n$ ist und definieren Sie einen Homöomorphismus von U_i nach $\mathbb{R}^n$.)

2. Sei X ein metrischer Raum. Für jede Teilmege $A \subseteq X$ definiert man den *Durchmesser von A* durch $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \in [0, \infty) : x, y \in A\} \in [0, \infty]$. Zeigen Sie: Ist X kompakt und $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X, so gibt es ein $\lambda > 0$, so dass für jede Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\operatorname{diam}(A) < \lambda$ gilt: Es gibt ein $i \in I$ mit $A \subseteq U_i$.

3. Sei G eine Gruppe. Für zwei Elemente $a, b \in G$ heißt $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ der *Kommutator von a und b*. Die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe heißt *Kommutator–Untergruppe G'* von G.

   (a) Zeigen Sie, dass G' ein Normalteiler von G ist. Wir nennen $G^{ab} := G/G'$ die *Abelianisierung* von G.

   (b) Zeigen Sie, dass G^{ab} abelsch ist und $\pi\colon G \to G^{ab}$ folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Ist H eine abelsche Gruppe und $\varphi\colon G \to H$ ein Homomorphismus, so existiert genau ein Homomorphismus $\bar{\varphi}\colon G^{ab} \to H$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

   (c) Definieren Sie nun einen Funktor $(.)^{ab}\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$.

4. (a) Sei X eine zusammenhängede, topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Zeigen Sie: $\pi_1(X) = \pi_1(X \setminus \{p\})$.

   (b) Zeigen Sie: $\pi_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2$ für alle $n \geq 2$. (Hinweis: Vollständige Induktion.)

Abgabe: Mittwoch, 13. Januar 2010, 9 Uhr

FROHE WEIHNACHTEN UND EINEN GUTEN RUTSCH INS NEUE JAHR!