

Mathematik I

für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 12 (Abgabe am 25.01.2010)

Aufgabe 52

(10 Punkte)

Bestimmen Sie

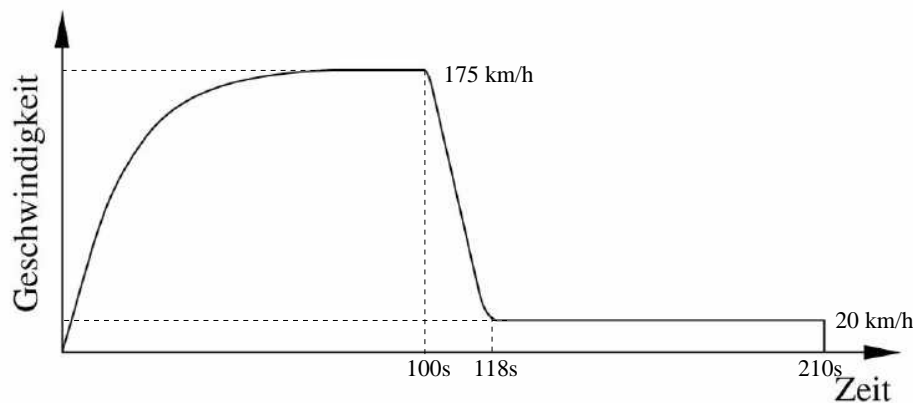
$$\int_1^e \frac{dx}{x}, \quad \int_1^3 \frac{1-x^2}{x^3} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx, \quad \int_0^3 e^{-x/2} dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 5^x dx.$$

HINWEIS: Wenn Sie eine Stammfunktion nicht erraten können, schlagen Sie unter “unbestimmte Integrale” in einem Tafelwerk, z.B. Bronstein & Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, oder im Internet, z.B. unter <http://integrals.wolfram.com/>, nach, und überzeugen Sie sich durch Ableiten von der Richtigkeit.

Aufgabe 53

(10 Punkte)

In der Vorlesung haben wir uns überlegt, dass der untenstehende Graph den Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf bei einem Fallschirmsprung beschreibt. Welche Größe wird durch die Fläche zwischen dem Graph und der Zeitachse beschrieben? Zeichnen Sie ein, wie der Graph verläuft, wenn sich der Fallschirm nicht öffnet. Zu welchem Zeitpunkt erreicht der Fallschirmspringer in diesem Fall den Boden?



Aufgabe 54

(10 Punkte)

Eine Wasserquelle versiegt allmählich. Der Wasseraustritt geht innerhalb von 2 Wochen von 30 l/min auf 1 l/min zurück. Wieviel Wasser ist in dieser Zeit ausgetreten, wenn wir annehmen, dass der Wasseraustritt pro Zeiteinheit als Funktion der Zeit exponentiell abnimmt?

Aufgabe 55 (Numerische Integration)

(10 Punkte)

Wir berechnen mit MATLAB die Riemannschen Ober- und Untersummen für die Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 2]$. Wir unterteilen dieses Intervall in N gleich große Teilintervalle. Da die Funktion f monoton wächst, nimmt sie immer am linken Rand eines Teilintervalls den kleinsten und am rechten Rand den größten Wert im Teilintervall an. Daher lauten die Ober- und Untersumme:

$$S_O(N) = \sum_{i=1}^N f(x_{i,\max}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^N f\left(\frac{2i}{N}\right) \frac{2}{N},$$

$$S_U(N) = \sum_{i=1}^N f(x_{i,\min}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^N f\left(\frac{2(i-1)}{N}\right) \frac{2}{N}.$$

Legen Sie eine Datei `so.m` mit dem folgenden Inhalt an.

```
function [obersumme] = so(N)
obersumme=zeros(1,length(N));
for i=1:length(N)
    j=1:N(i);
    obersumme(i)=sum((2*j./N(i)).^2*2./N(i));
end
end
```

Mit dem Befehl `so(100)` können Sie nun den Wert von $S_O(100)$ berechnen. Schreiben Sie analog eine Funktion `su`, die als Eingabe den Wert N erhält und $S_U(N)$ zurückgibt. Plotten Sie die Werte von $S_O(N)$ und $S_U(N)$ für $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ zusammen in ein Diagramm (Bietet sich hier eine logarithmische Skaleneinteilung an?), und lesen Sie daraus ungefähr den Grenzwert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_O(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_U(N) = \int_0^2 f(x) dx$$

ab. Überprüfen Sie, dass Sie dasselbe Ergebnis durch Rechnung aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung erhalten, indem Sie benutzen, dass $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von f ist.

Berechnen Sie nun analog Riemannsche Ober- und Untersummen für die Funktion $f(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$ im Intervall $[0, 1]$, fertigen Sie wieder einen entsprechenden Plot an und lesen Sie daraus den Wert des Integrals

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

ab.