Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 7 (Abgabe am 07.12.2009)

Aufgabe 32 (10 Punkte)

Beim Rechnen mit Matrizen gelten etwas andere Regeln als beim Rechnen mit Zahlen.

a) Zeigen Sie (durch ausrechnen) für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dass}$$

(i) $A^2 = 0$ (obwohl $A \neq 0$),
(ii) $B^2 = -I$ (obwohl die Gleichung $x^2 = -1$ für $x \in \mathbb{R}$ keine Lösung hat), und
(iii) $AB \neq BA$.
(iv) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

b) Begründen Sie, warum die Regel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ im allgemeinen nicht gilt, wenn a und b statt Zahlen $n \times n$-Matrizen sind.

Aufgabe 33 (10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) AA^T, b) A^TA, c) AA^TB, d) A^TAB,
e) B^TA^TA, f) A^2, g) AA^TAA^T.

Aufgabe 34 (10 Punkte)

Ein Mischwald bestehe im Jahr t aus L_t Laubbäumen und N_t Nadelbäumen. Wir nehmen an, dass jedes Jahr 4% der Laubbäume und 13% der Nadelbäume absterben, und dass an den frei werdenden Plätzen sofort neue Bäume nachwachsen, und zwar in 11% der Fälle Laubbäume und in 89% der Fälle Nadelbäume. Entsprechend ergibt sich das folgende Populationsmodell:

$$\begin{pmatrix} L_{t+1} \\ N_{t+1} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} L_t \\ N_t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad W \in \mathcal{M}(2,2)\,.$$

a) Bestimmen Sie die 2×2-Matrix W.

b) Bilden Sie die Spaltensummen von W. Was bedeutet Ihr Ergebnis?

Aufgabe 35 (10 Punkte)

Berechnen Sie – nun mithilfe von MATLAB – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

a) $2A$, b) $A + B$, c) $3A - 2B$, d) $(3A)^T - (2B)^T$,
e) AB, f) BA, g) $A^T B^T$, h) $(BA)^T$.

Beispiel 8: (Rechnen mit Matrizen)

» `A = [1 2; 3 4]` definiert in Matlab die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.
» `B = [0 1; 1 0]` ... die Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

» `3*A` berechnet das 3-fache der Matrix A
» `A+B` berechnet die Summe $A + B$ und
» `A-B` die Differenz der Matrizen A und B.
Summe und Differenz sind definiert, wenn A und B beide dieselbe Form $(n \times m)$ haben.

» `A*B` berechnet das Matrix-Produkt AB (möglich, falls die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist).
» `A.*B` berechnet das komponentenweise Produkt der Matrizen A und B.
Merke: Die mathematische Schreibweise AB muß in Matlab-Notation mit `A*B` übersetzt werden und nicht mit `A.*B`.

» `A'` oder
» `transpose(A)` liefert die transponierte Matrix A^T. (Zeilen und Spalten von A werden vertauscht.)
Hinweis: `B*A'` ist das Produkt von B und A^T und nicht $(BA)^T$.

» `A^3` liefert die dritte Potenz A^3 der Matrix A, d.h. das dreifache Matrix-Produkt $A^3 = AAA$ der Matrix A mit sich selbst.
» `A.^3` dagegen liefert eine Matrix, die als Einträge die Einträge von A, komponentenweise zur 3. Potenz erhoben, hat. Diese Operation haben wir schon oft zum Manipulieren von Datenvektoren (d.h. von $1 \times n$- bzw. $n \times 1$-Matrizen) verwendet. Jetzt wissen Sie, warum hier der Punkt notwendig war (bzw. was Matlab ohne Punkt macht oder zu machen versucht). Vergleichen Sie zur Illustration nochmals `B^2` und `B.^2` miteinander. Beachten Sie auch, dass mit der mathematischen Schreibweise A^n immer das n-fache Matrixprodukt `A^n` gemeint ist und nie die komponentenweise Potenz `A.^n`.

» `A(2,1)` liefert den Eintrag der in der zweiten Zeile und in der ersten Spalte von A steht. Sie können auch einzelne Einträge verändern: Schreiben Sie
» `A(1,2) = 5` und betrachten Sie die veränderte Matrix A.