Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Klausur am 17.2.2010

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 82 Punkte erreichbar, 64 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 32 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (2+2+2+3+5+2 = 16 Punkte)
Ein Vogel fliegt 2 min lang mit einer Geschwindigkeit von $4\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$ über Grund nach Südosten. Danach fliegt er 3 min lang nach Osten. Während der gesamten Zeit weht ein konstanter Wind mit 3 m/s aus Norden. Gegenüber der ihn umgebenden Luft bewegt sich der Vogel die ganze Zeit mit der gleichen Geschwindigkeit.

Wählen Sie ein Koordinatensystem dessen x_1-Achse nach Osten und dessen x_2-Achse nach Norden zeigt. Bezeichnen Sie mit $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ die Vektoren der Fluggeschwindigkeit (über Grund) auf den beiden Teilstücken, mit $\vec{w}$ den Vektor der Windgeschwindigkeit sowie mit $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ die Geschwindigkeitsvektoren gegenüber der umgebenden Luft (alles in m/s).

a) Geben Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1$ (Vogel über Grund auf dem ersten Teilstück) an.
b) Geben Sie den Vektor $\vec{w}$ der Windgeschwindigkeit an.
c) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{v}_2/|\vec{v}_2|$ (Vogel über Grund auf dem zweiten Teilstück) an.
d) Wie schnell bewegt sich der Vogel gegenüber der ihn umgebenden Luft?
e) Mit welcher Geschwindigkeit (über Grund) fliegt der Vogel Richtung Osten (auf dem zweiten Teilstück)?
f) Wieviel m südlich und wieviel m östlich vom Ausgangsort befindet sich der Vogel nach der Gesamtflugzeit von 5 min?

Aufgabe 2 (2+2+3+6+2+3 = 18 Punkte)

Ein Maikäferweibchen legt Eier und stirbt im selben Jahr. Aus den Eiern entwickeln sich im darauffolgenden Jahr 80 Larven (Engerlinge). Ein Viertel der Larven überlebt das erste Jahr und wieder ein Viertel davon überlebt auch das zweite Jahr. Im dritten Jahr verpuppen sich die Larven. Aus einem Fünftel der Puppen schlüpfen im vierten Jahr Maikäferweibchen, die im gleichen Jahr wieder Eier legen und sterben.

Wir charakterisieren eine Maikäferpopulation zur Zeit t durch einen Populationsvektor

$$\vec{x}^{(t)} = \begin{pmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \\ x_3^{(t)} \\ x_4^{(t)} \end{pmatrix},$$

wobei $x_1^{(t)}$ die Anzahl der neu geschlüpften Larven, $x_2^{(t)}$ die der einjährigen Larven, $x_3^{(t)}$ die der zweijährigen Larven und $x_4^{(t)}$ die Anzahl der Maikäferweibchen bezeichnet. Den Populationsvektor im Jahr $t+1$ erhält man durch Multiplikation mit der Leslie-Matrix L, $\vec{x}^{(t+1)} = L\vec{x}^{(t)}$, wobei L die Form

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ L_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Die Startpopulation $\vec{x}^{(0)}$ bestehe aus 2000 neu geschlüpften, 1000 einjährigen und 500 zweijährigen Larven sowie 500 Maikäferweibchen.

a) Geben Sie die fehlenden Werte L_{21} und L_{43} der Lesliematrix an.
b) Bestimmen Sie den Populationsvektor für das Jahr $t = 1$.
c) Bestimmen Sie den Populationsvektor für das Jahr $t = -1$.
d) Berechnen Sie L^2 und L^4.
e) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis für L^4 hinsichtlich seiner Bedeutung für die zeitliche Entwicklung der Population (unabhängig von $\vec{x}^{(0)}$). Schreiben Sie dazu maximal zwei Sätze.
f) Bestimmen Sie $\vec{x}^{(17)}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen der Zeit t beschreiben exponentielles Wachstums, welche exponentiellen Zerfall? Notieren Sie für die Teilaufgaben jeweils ein **W** für Wachstum oder ein **Z** für Zerfall (ohne Begründung).

Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Unbearbeitete Teilaufgaben geben weder Plus- noch Minus-Punkte. Sollte sich insgesamt eine negative Punktzahl für die Gesamtaufgabe ergeben, so wird sie mit Null Punkten gewertet.

(a) $(3/2)^{-t}$ (b) $\mathrm{e}^{-t/2}$ (c) $(2/3)^{t}$ (d) $3\mathrm{e}^{2t}$ (e) $(1/2)^{1-t}$

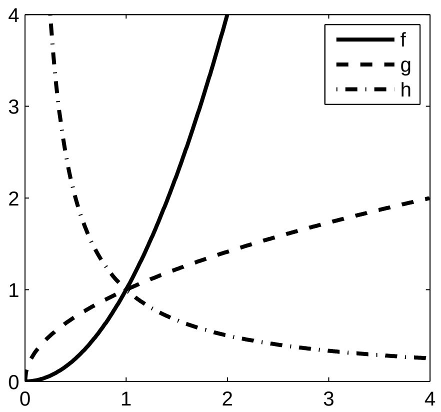
(f) $(2/3)^{-t}$ (g) $(3/2)^{t}$ (h) $(1/2)^{1+t}$ (i) $2\mathrm{e}^{-3t}$ (j) $(2/3)^{t-1}$

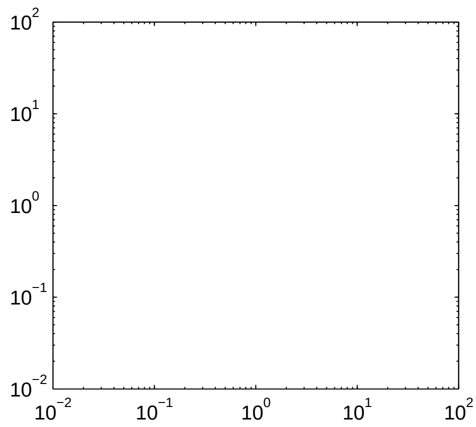
Aufgabe 4 (6+6 = 12 Punkte)

Die Linien im linken Diagramm sind Ausschnitte der Graphen dreier Funktionen, f, g und h, der Form $x \mapsto x^\alpha$.

a) Geben Sie für jeden der Graphen den passenden Wert α an.

b) Übertragen Sie das doppelt logarithmische Diagramm rechts auf Ihr Blatt und zeichnen Sie auch dort die Graphen der drei Funktionen ein. (Beschriftung nicht vergessen!)





Aufgabe 5 (2+2+10 = 14 Punkte)

Ein Taubenschlag befinde sich im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Die x-Achse zeige Richtung Osten, die y-Achse Richtung Norden. Nördlich der x-Achse befinde sich ein Meer, südlich der x-Achse Land. Eine Taube wird 4 km östlich und 3 km nördlich des Taubenschlags über dem Wasser ausgesetzt. Sie möchte zum Taubenschlag zurückfliegen.

Wir nehmen an, dass die Taube beim Flug über kaltes Wasser (fallende Luft) mehr Energie aufwenden muss, um ihre Flughöhe zu halten, als über Land. Beim Flug über Wasser verbrauche sie zwei Energieeinheiten pro km, beim Flug über Land (bzw. am Strand) nur eine.

a) Wieviele Energieeinheiten benötigt die Taube, wenn sie zunächst auf kürzestem Weg zum Strand fliegt, und dann am Stand entlang zum Taubenschlag?

b) Wieviele Energieeinheiten benötigt die Taube wenn sie direkt auf kürzestem Weg zum Taubenschlag fliegt?

c) Die Taube fliege nun von ihrem Startpunkt geradlinig zum Punkt $(x, 0)$, und von dort am Strand entlang zum Taubenschlag.

   (i) Bestimmen Sie die dafür benötigte Energie E als Funktion von x.

   (ii) Welches x muss die Taube wählen, um den Energieverbrauch zu minimieren? Wieviele Energieeinheiten benötigt sie also mindestens für die Heimkehr? Begründen Sie, warum der Energieverbrauch für den von Ihnen bestimmten x-Wert wirklich minimal ist (und nicht z.B. maximal).

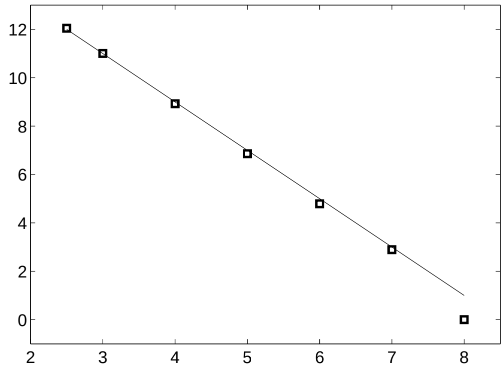
Aufgabe 6 (2+4+4+2 = 12 Punkte)

Die folgende Tabelle gibt den Zusammenhang zwischen der Stärke M eines Erdbebens auf der Richterskala und der durchschnittlichen Anzahl n solcher Beben pro Jahr an (weltweit).

M	2,5	3	4	5	6	7	8
n	170 000	60 000	7 500	950	120	18	1

Mit Hilfe der folgenden MATLAB-Befehle wurde der Logarithmus von n gegen M aufgetragen:

```
» M=[2.5 3 4 5 6 7 8];
» n=[170000 60000 7500 950 120 18 1];
» plot(M,log(n),'s')
» hold on
» plot(M,17-2*M)
» hold off
```



Dies legt einen Zusammenhang nahe, der durch die ebenfalls eingezeichnete Gerade dargestellt werden kann.

a) Es scheint, dass beim Einzeichnen der Geraden der Punkt an der Stelle $M = 8$ ignoriert wurde. Begründung Sie (in maximal zwei Sätzen), warum dies vernünftig sein könnte.

b) Geben Sie die Häufigkeit von Erdbeben als Funktion der Stärke auf der Richterskala, d.h. die Funktion $n(M)$, gemäß der Geraden an.

Die bei einem Erdbeben freigesetzte Energie W wächst exponentiell mit der Stärke M, näherungsweise gilt: $W = 10^{\frac{3}{2}M-2}$, wobei die Energie in Tonnen TNT angegeben ist.

c) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen der Häufigkeit n und der Energie W, d.h. geben Sie die Funktion $n(W)$ an (basierend auf der Geraden aus dem Diagramm).

d) Was für ein Zusammenhang besteht also (und basierend auf der Geraden aus dem Diagramm) zwischen der Häufigkeit n und der Energie W? Ein linearer, ein Potenzgesetz, ein exponentieller, ein logarithmischer oder keiner der Genannten?