Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Nachklausur am 29.3.2010

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 87 Punkte erreichbar, 64 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 32 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (2+2+2+2+5 = 13 Punkte)

Ein Vogel fliegt 10 min lang mit einer Geschwindigkeit von 9 m/s über Grund nach Südosten. Danach fliegt er 5 min lang nach Süden. Während der gesamten Zeit weht ein konstanter Wind mit 4 m/s aus Nordwesten. Gegenüber der ihn umgebenden Luft bewegt sich der Vogel die ganze Zeit mit der gleichen Geschwindigkeit.

Wählen Sie ein Koordinatensystem dessen x_1-Achse nach Osten und dessen x_2-Achse nach Norden zeigt. Bezeichnen Sie mit $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ die Vektoren der Fluggeschwindigkeit (über Grund) auf den beiden Teilstücken, mit $\vec{w}$ den Vektor der Windgeschwindigkeit sowie mit $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ die Geschwindigkeitsvektoren gegenüber der umgebenden Luft (alles in m/s).

a) Geben Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1$ (Vogel über Grund auf dem ersten Teilstück) an.
b) Geben Sie den Vektor $\vec{w}$ der Windgeschwindigkeit an.
c) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{v}_2/|\vec{v}_2|$ (Vogel über Grund auf dem zweiten Teilstück) an.
d) Wie schnell bewegt sich der Vogel gegenüber der ihn umgebenden Luft?
e) Mit welcher Geschwindigkeit (über Grund) fliegt der Vogel Richtung Süden (auf dem zweiten Teilstück)?

Aufgabe 2 (4+2 = 6 Punkte)

Bei einer Geschwindigkeit vom 100km/h liegt der Benzinverbrauch von Martins Auto bei 5ℓ pro 100km; bei 150km/h sind es 9ℓ pro 100km. Martin fährt zunächst 100km mit 100km/h und dann 100km mit 150km/h.

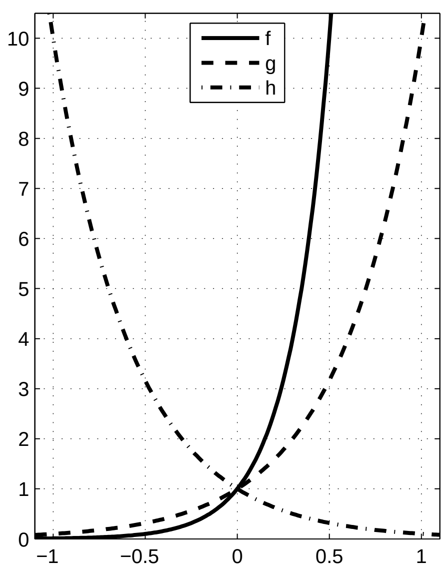
a) Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?
b) Wie groß ist sein durchschnittlicher Verbrauch?

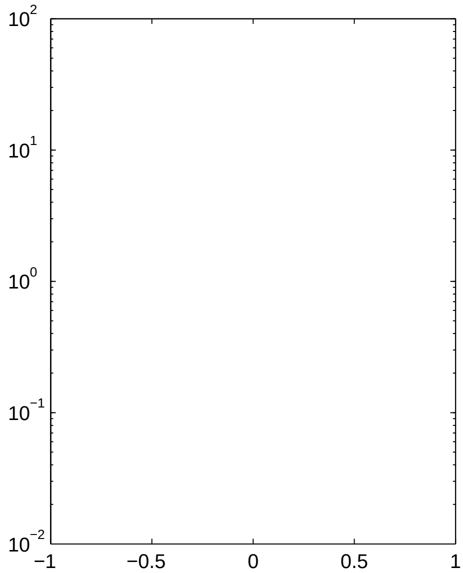
Aufgabe 3 (6+6 = 12 Punkte)

Die Linien im linken Diagramm sind Ausschnitte der Graphen dreier Funktionen, f, g und h, der Form $x \mapsto a^x$.

a) Geben Sie für jeden der Graphen den passenden Wert a an.

b) Übertragen Sie das logarithmische Diagramm rechts auf Ihr Blatt und zeichnen Sie auch dort die Graphen der drei Funktionen ein. (Beschriftung nicht vergessen!)





Aufgabe 4 (6+4+4 = 14 Punkte)

Aus Reis und Chilibohnen soll eine Mahlzeit zusammengestellt werden, die den folgenden Bedingungen genügt: Sie soll

- mindestens 18 g Eiweiß enthalten,
- mindestens 100 g Kohlenhydrate enthalten und
- höchstens 600 g schwer sein.

Pro 100 g enthalte

- der Reis 25 g Kohlenhydrate und 2 g Eiweiß und
- die Bohnen 10 g Kohlenhydrate und 6 g Eiweiß.

Bezeichnen Sie mit x die Reismenge in 100 g-Einheiten (d.h. $x = 2{,}5$ entspricht 250 g Reis) und mit y die Menge an Chilibohnen, ebenfalls in 100 g-Einheiten.

a) Drücken Sie die drei Bedingungen jeweils als Ungleichungen in x und y aus.

b) Kennzeichnen Sie in einem xy-Diagramm ($0 \leq x, y \leq 6$) den Bereich, in dem alle drei Bedingungen erfüllt sind.

c) Wie muss eine Mahlzeit zusammengestellt sein, damit sie allen drei Bedingungen genügt und die Eiweißmenge maximiert wird?

Hinweis: Identifizieren Sie den entsprechenden Punkt in Ihrem Diagramm und berechnen Sie seine Koordinaten.

Aufgabe 5 (2+4+2+2+4 = 14 Punkte)

In einem Nationalpark hat sich die anfangs kleine Population von Murmeltieren, 400 an der Zahl, innerhalb von 3 Jahren vervierfacht. Die Bedingungen sind optimal, wir gehen von exponentiellem Wachstum aus. Sei t die Zeit (gemessen in Jahren) und $N(t)$ die Größe der Population zur Zeit t.

a) Geben Sie $N(0)$ und $N(3)$ an.

b) Beschreiben Sie das Wachstum der Population durch eine Funktion der Form $N(t) = N(0)\,\alpha^t$, d.h. geben Sie insbesondere α an.

c) Wir groß war die Population am Ende des 2. Jahres?

d) Zu welchen Zeitpunkt t hatte sich die Population verdoppelt?

e) Aufgrund der örtlichen Gegebenheiten geht die Parkverwaltung davon aus, dass sich die Murmeltiere ungehindert vermehren können, bis die Population eine Größe von 4000 erreicht hat. Wann wird diese Größe erreicht werden?

Aufgabe 6 (6+6+2 = 14 Punkte)

In Simplistan leben momentan 15 Millionen Frauen, 15 Millionen Männer und 12 Millionen Kinder (die Hälfte davon Mädchen). Wir beschreiben die Bevölkerung von Simplistan durch den Populationsvektor

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix},$$

der in der ersten Zeile die Anzahl Frauen, in der zweiten die Anzahl Männer und in der dritten die Anzahl Kinder enthält (jeweils in Millionen); analog sei $\vec{x}_t$ der Populationsvektor zur Zeit t (in Jahren ab heute).

- Pro Jahr erreichen 4% der Kinder das Erwachsenenalter (gleich viele Mädchen wie Jungen).
- Jährlich bekommen 20% der Frauen ein Kind.
- Außerdem sterben pro Jahr 12% der Männer und 10% der Frauen.

Aus- und Einwanderung, Todesfälle von Kindern sowie Teenager-Schwangerschaften werden vernachlässigt.

Demnach wird die Bevölkerungsentwicklung durch das folgende Modell beschrieben:

$$\vec{x}_{t+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_{11} & 0 & 0{,}02 \\ 0 & 0{,}88 & 0{,}02 \\ w_{31} & 0 & w_{33} \end{pmatrix}}_{:= W} \vec{x}_t \qquad \text{d.h.} \qquad W = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 100w_{11} & 0 & 2 \\ 0 & 88 & 2 \\ 100w_{31} & 0 & 100w_{33} \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die fehlenden Werte w_{11}, w_{31} und w_{33} der Übergangsmatrix an.

b) Bestimmen Sie alle stationären Populationen, d.h. alle $\vec{x}$, für die $W\vec{x} = \vec{x}$ gilt.

c) In hundert Jahren habe sich eine stationäre Population mit 6 Millionen Frauen eingestellt. Wieviele Kinder leben dann in Simplistan?

Aufgabe 7 (4+2+2+2+4 = 14 Punkte)

Der Luftdruck p erfüllt als Funktion der Höhe z über der Meerespiegel die Differenzialgleichung

$$p'(z) = -\frac{\alpha}{T(z)}p(z)\,.$$

Dabei ist $\alpha = 34\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{km}}$ eine Konstante und $T(z)$ die Temperatur in der Höhe z.

a) Wir nehmen an, die Temperatur habe, unabhängig von z, den konstanten Wert $T_0 = 272\,\mathrm{K}$ (also knapp unter 0° C).

(i) Wie muss die Konstante λ gewählt werden, damit

$$p(z) = C\mathrm{e}^{-\lambda z}$$

die Differenzialgleichung löst? (Hinweis: $8 \cdot 34 = 272$)

(ii) Wie muss außerdem C gewählt werden, damit der Luftdruck in Meereshöhe $1013\,\mathrm{mbar}$ beträgt?

(iii) In welcher Höhe z_0 ist der Luftdruck auf den halben Ausgangswert, d.h. auf $506,5\,\mathrm{mbar}$ abgefallen?

(iv) Welcher Luftdruck herrscht in der Höhe $2z_0$ (mit z_0 aus (iii))?

b) Nun nehmen wir an, dass

$$T(z) = T_0 - \gamma z \qquad \text{mit} \qquad \gamma = 6{,}8\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{km}}\,,$$

d.h. dass die Temperatur linear mit der Höhe abnimmt. Wie muss die Konstante β gewählt werden, damit

$$p(z) = C(T_0 - \gamma z)^\beta$$

die Differenzialgleichung löst?