

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Exponentialfunktion & Logarithmus

Stefan Keppeler

9. November 2009

Potenzen

Definitionsbereiche

Potenzrechenregeln

Exponentialfunktion

Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse

Beispiel

\exp

Dimensionen

Beispiel: Radioaktiver Zerfall

Beispiel: Lichtabsorption

Logarithmus

Definition

Umkehrfunktionen

Injektivität

Beispiel: \sqrt{x}

Monotonie

Potenzen x^α sind auf dreierlei Definitionsbereichen erklärt:

- ▶ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{Z}$
- ▶ $x = 0$ und $\alpha \geq 0$
- ▶ $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nicht erklärt (in \mathbb{R}) ist x^α demnach für

- ▶ $x = 0$ und $\alpha < 0$ (also nicht " $\frac{1}{0}$ ")
- ▶ $x < 0$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (also z.B. nicht " $\sqrt{-1}$ ")

Übrigens:

- ▶ $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ (für $x \neq 0$)
- ▶ $x^{1/2} = \sqrt{x}$ und $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

Rechenregeln

- ▶ $x^\alpha x^\beta = x^{(\alpha+\beta)}$
- ▶ $x^0 = 1$, $x^1 = x$ und $0^\alpha = 0$ (für $\alpha > 0$)
- ▶ $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- ▶ $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$

Beispiel: $\sqrt[3]{9^{-2} \cdot 3} =$ 

Außerdem:

- ▶ wenn $0 < x < y$ und $\alpha > 0 \Rightarrow x^\alpha < y^\alpha$
- ▶ wenn $0 < x < y$ und $\alpha < 0 \Rightarrow x^\alpha > y^\alpha$



, vergleiche auch mit ÜA 21.

Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse

- ▶ Bisher: ganzzahlige Zeit t (zeitdiskret)
- ▶ Jetzt auch: $t \in \mathbb{R}$ (kontinuierlich)
- ▶ Gleichungen

$$G_t = \alpha^t G_0 \quad (\text{geometrisch}) \quad (1)$$

$$A_t = A_0 + \beta t \quad (\text{arithmetisch}) \quad (2)$$

bleiben gültig (nicht jedoch die Rekursionen!).

- ▶ Funktionen
 - ▶ der Form (1) heißen **Exponentialfunktionen**,
 - ▶ der Form (2), **linear** bzw. affin-linear.

Notation:

Statt G_t bzw. A_t schreibt man auch oft $G(t)$ bzw. $A(t)$.



Beispiel:

- ▶ Kredit über 100€ zu 6% Jahreszins

- ▶ Rückzahlung nach halbem Jahr: Wieviel? 

$$G_{1/2} = \alpha^{1/2} G_0 = \sqrt{1,06} \cdot 100\text{€} \approx 102,96\text{€},$$

nicht mit $\frac{6\%}{2} = 3\%$ verzinsen, 3€ Zinsen wären zu viel.

- ▶ Entsprechend: Schuld nach einem Monat:

$$G_{1/12} = \alpha^{1/12} G_0 \approx 100,487\text{€}$$

- ▶ Insbesondere ist der monatliche Zinssatz $\approx 0,487\%$,
und damit geringer als $\frac{6\%}{12} = 0,5\%$ (vgl. Zinsezins)

Andere Schreibweise:

- ▶ $\alpha^t = e^{\gamma t}$,
- ▶ wobei $e = 2,71828182846\dots$ (**Eulersche Zahl**),
- ▶ und $\gamma \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $e^\gamma = \alpha$. 
- ▶ e als Basis ist geschickt, da $(e^x)' = e^x$. (Ableitung, später)
- ▶ Statt e^x schreibt man auch $\exp(x)$ (**Exponentialfunktion**).

Dimensionen

- ▶ Betrachte t nicht als reine Zahl (z.B. Anzahl Jahre), sondern als **dimensionsbehaftet** (verstrichene Zeit)
- ▶ Exponent muss dimensionlos sein
 - ▶ schreibe daher statt α^t nun $\alpha^{t/T}$,
 - ▶ mit Vergleichs-Zeitraum T (frei wählbare **Einheit**)
- ▶ Mit $\lambda = \frac{\gamma}{T}$ gilt:  $\alpha^{t/T} = (e^\gamma)^{t/T} = e^{\gamma t/T} = e^{\lambda t}$
- ▶ Dimension: $[\lambda] = 1/[t]$
- ▶ Bedeutung folgt aus $G_{1/\lambda} = e G_0$ bzw. $G_{-1/\lambda} = \frac{1}{e} G_0$:
 - ▶ $\lambda > 0$: $\frac{1}{\lambda}$ ist die Zeit, in der G auf das e -fache anwächst
 - ▶ $\lambda < 0$: $-\frac{1}{\lambda}$ ist die Zeit, in der G auf das $\frac{1}{e}$ -fache abfällt

Beispiel: Radioaktiver Zerfall

- ▶ $G(t)$: **Materialmenge** (in Anzahl Atome oder Mol oder kg...) als Funktion der Zeit t ist Exponentialfunktion,

$$G(t) = G(0) e^{-\lambda t},$$

mit Materialkonstante $\lambda > 0$.

- ▶ $Z(t)$: Anzahl **Zerfälle** in einem Zeitintervall $[t, t + T]$, T fest), ist ebenfalls Exponentialfunktion,

$$Z(t) = Z(0) e^{-\lambda t}$$

mit derselben Konstante $\lambda > 0$.

- ▶ **Bedeutung:**

In gleich langen Zeitintervallen $[t, t + T]$ zerfällt stets derselbe Anteil der zu Beginn vorhandenen Menge.



Beispiel: Lambert–Beer-Gesetz der Lichtabsorption

Legt ein monochromatischer (einfarbiger) Lichtstrahl der einfallenden Intensität (Energie) I_0 durch ein absorbierendes Medium (z.B. Farbstoff) den Weg s zurück, so beträgt die Intensität des austretenden Strahls

$$I_s = I_0 e^{-\lambda s},$$

wobei die Konstante λ vom Material, von der Konzentration des Materials (z.B. in Wasser gelöster Farbstoff) und der Farbe (Wellenlänge) des Lichts abhängt.

Herleitung: Lambert-Beer-Gesetz der Lichtabsorption

- ▶ Die Intensität des austretenden Strahls I_{aus} ist immer proportional zur Intensität des einfallenden Strahls I_{ein} .
- ▶ Skizze 

$$\Rightarrow \alpha_{s_1} \cdot \alpha_{s_2} = \alpha_{s_1+s_2}$$

- ▶ Klappt nur, falls $\alpha_s = e^{-\lambda s}$, denn

$$\alpha_{s_1} \alpha_{s_2} = e^{-\lambda s_1} e^{-\lambda s_2} = e^{-\lambda(s_1+s_2)} = \alpha_{s_1+s_2} \cdot$$

- ▶ Der **Logarithmus** ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h.

$$y = \log x$$

ist die eindeutige Lösung der Gleichung $e^y = x$ zu gegebenem $x > 0$.



- ▶ Es gilt also $\log(e^x) = x = e^{\log x}$ für $x > 0$.
- ▶ Damit folgen Rechenregeln für den Logarithmus aus den Potenzrechenregeln

Beispiel:



- ▶ **Notation:**

Machmal schreibt man auch \ln (*Logarithmus naturalis*) statt \log – wir schreiben \log .

Wann besitzt eine Funktion $f : A \rightarrow B$ eine Umkehrfunktion?

Definition: Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **injektiv**, wenn die Bilder verschiedener Elemente stets verschieden sind, d.h.

$$f(x) \neq f(y) \quad \text{für} \quad x \neq y.$$

- ▶ Wenn f nicht injektiv ist, dann besitzt die Gleichung $f(x) = b$ für manche b mehrere Lösungen x . 
- ▶ Wenn f injektiv ist, dann besitzt sie genau eine Lösung, genannt $x = f^{-1}(b)$, für jedes $b \in f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$.

Definition: Die so definierte Funktion $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ heißt **Umkehrfunktion** von f und erfüllt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(b)) = b.$$

Beispiel:

- ▶ Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $f_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_1(x) = x^2$.
- ▶ Ebenso ist $x \mapsto -\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion von $f_2 : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = x^2$.



Beachte: (Notation)

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$



Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- **streng monoton wachsend**, wenn $f(x) < f(y)$ für $x < y$,
- **streng monoton fallend**, wenn $f(x) > f(y)$ für $x < y$,
- **monoton wachsend**, wenn $f(x) \leq f(y)$ für $x < y$ und
- **monoton fallend**, wenn $f(x) \geq f(y)$ für $x < y$.

Beispiele:

- ▶ \exp ist streng monoton wachsend
- ▶ $f = \text{const}$ ist monoton wachsend und fallend, aber nicht streng
- ▶ $x \mapsto x^\alpha$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ ist streng monoton wachsend für $\alpha > 0$ und fallend für $\alpha < 0$.



Satz:

Streng monotone Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ sind injektiv.

Beweis: 

Folgerung:

- ▶ Da \exp streng wachsend ist,
- ▶ und da $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$,
- ▶ existiert auf $D = \mathbb{R}^+$ die Umkehrfunktion,
genannt \log (Logarithmus).