

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Mehr über den Logarithmus

Stefan Keppeler

16. November 2009

Wiederholung

Definition des Logarithmus

Anwendungen

Beispiel: Halbwertszeit

Logarithmische Skalenteilung

Andere Basen

Beispiel: pH-Wert

- ▶ Der **Logarithmus** ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h.

$$y = \log x$$

ist die eindeutige Lösung der Gleichung $e^y = x$ zu gegebenem $x > 0$.

- ▶ Es gilt also $\log(e^x) = e^{\log x} = x$ für $x > 0$.
- ▶ Damit folgen Rechenregeln für den Logarithmus aus den Potenzrechenregeln
- ▶ **Notation:**
Manchmal schreibt man auch \ln (*Logarithmus naturalis*) statt \log – wir schreiben \log .



Beispiel: Die **Halbwertszeit** $t_{1/2}$ einer radioaktiven Substanz ist die Zeit, in der die Aktivität (Anzahl Zerfälle pro Minute) oder auch die vorhandene Menge auf die Hälfte zurückgeht, also

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}.$$



Zusammenhang zwischen $t_{1/2}$ und dem Zerfallsparameter λ :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\log 2}{\lambda} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\log 2}{t_{\frac{1}{2}}}, \quad \text{denn}$$



Logarithmische Skalenteilung: Trage auf einer Skala nicht die interessante Größe x selbst sondern $\log x$ auf.*

- ▶ Allgemein: Stelle Variable über mehrere Größenordnungen dar.

- ▶ Erwarte exponentiellen Zusammenhang,
 $y = c e^{\lambda x}$ mit Konstanten $c, \lambda \in \mathbb{R}$,
 y -Achse logarithmisch \rightsquigarrow Gerade, denn

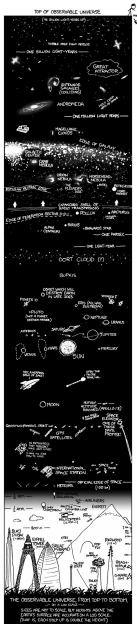
$$\log y = \log c + \lambda x.$$

- ▶ Erwarte Potenzgesetz,
 $y = c x^\alpha$ mit Konstanten $c, \alpha \in \mathbb{R}$,
beide Achsen logarithmisch \rightsquigarrow Gerade, denn

$$\log y = \log c + \alpha \log x.$$

<http://xkcd.com/482/>

* Oft schreibt man dennoch x an die Achse,
teilt sie aber logarithmisch ein.



Andere Basen

- ▶ Für $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ besitzt auch die Gleichung $\alpha^y = x$
- ▶ mit gegebenem $x > 0$
- ▶ eine eindeutige Lösung $y = \log_{\alpha} x$, genannt **Logarithmus von x zur Basis α** .

Bemerkung: Damit gilt $\log = \log_e$.

Beliebte Basen außer e sind

- ▶ 2 (“binärer Logarithmus”, **lb**) und
- ▶ 10 (“dekadischer Logarithmus”, **lg**).

Aus den Potenzrechenregeln folgt

$$\log_{\alpha} x = \frac{\log(x)}{\log(\alpha)}.$$



Der **pH-Wert** (lat. *pondus Hydrogenii* = Gewicht des Wasserstoffs) ist ein Maß für die Säure einer Flüssigkeit und gibt die Konzentration der Wasserstoff-Ionen logarithmisch an,

$$\text{pH} = -\log_{10}(\rho).$$

Hierbei ist ρ , grob gesagt,¹ die Konzentration der Protonen H^+ .

- ▶ Wein ($\text{pH} \approx 4$) hat also die 1000-fache Protonenkonzentration von Wasser ($\text{pH} = 7$),
- ▶ Seife ($9 \leq \text{pH} \leq 10$) entsprechend $\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{1000}$ der H_3O^+ -Konzentration von Wasser.

¹genauer gesagt, der Quotient aus der Aktivität der Oxoniumionen H_3O^+ zur Aktivität von H_2O

