

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Trigonometrie

Stefan Keppeler

16. November 2009

Prolog

Quadratische Gleichungen
Satz des Pythagoras

Winkel

Trigonometrische Funktionen

Definition
Graphen von \sin , \cos , \tan .
Beispiel: Schwingungen
Additionstheoreme
Umkehrfunktionen

Quadratische Gleichungen in einer Variablen sind von der Form

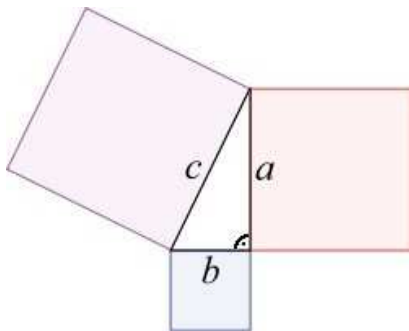
$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a \neq 0$ (sonst ist es eine lineare Gleichung) und besitzen die Lösungen


$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Erhält man durch quadratische Ergänzung.

Satz: In einem rechtwinkligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$.



Beweis: 

Beispiel: Entfernung des Horizonts 

Die gängigen Einheiten zur Winkelmessung sind das **Gradmaß** und das **Bogenmaß** ($\varphi = \ell/r$, $\ell =$ Länge des Kreisbogens mit Radius r zum Öffnungswinkel φ).

Gradmaß	Bogenmaß
360°	2π
180°	π
90°	$\pi/2$
$57^\circ 17' 45''$	1
45°	$\pi/4$
30°	$\pi/6$
1°	0,0175

Allgemein: $g = (360^\circ/2\pi)b$ bzw. $b = (2\pi/360^\circ)g$.

$(1/60)^\circ = 1' = 1$ (Bogen-)Minute,

$(1/60)' = 1'' = 1$ (Bogen-)Sekunde.



Definition: Winkelfunktionen (im rechtwinkligen Dreieck)

$$\sin = \text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos = \text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\tan = \text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}, \quad \cot = \text{Kotangens} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}.$$

Die folgenden braucht man eigentlich nicht...

$$\sec = \text{Sekans} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}}, \quad \csc = \text{Kosekans} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}}.$$

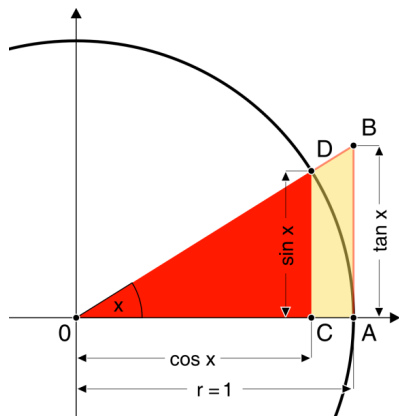
Beispiel: Die Steigung einer schiefen Ebene ist der Tangens des Neigungswinkels.

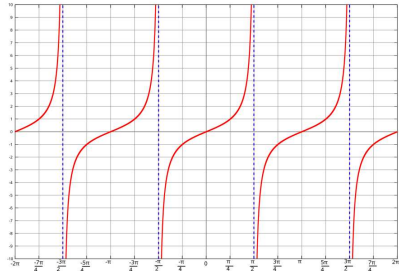
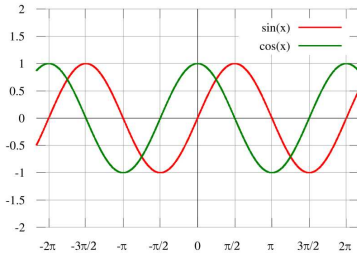


Geometrische Deutung als
Streckenlängen mit Vorzeichen
am Einheitskreis.

Satz des Pythagoras:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$$






$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Periodizität:

- ▶ $f(x + 2\pi) = f(x)$ für $f = \sin, \cos, \tan$
- ▶ auch $f(x + 2\pi n) = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$
- ▶ für Tangens sogar $\tan(x + n\pi) = \tan x \quad \forall n \in \mathbb{Z}$




Bei **Schwingungsphänomenen** (Oszillationen), z.B., Vibration, Schall, Licht) oder Rotationsbewegung ist eine Größe $S(t)$ eine periodische Funktion der Zeit, $S(t + T) = S(t)$, 

- ▶ $T =$ Periode
- ▶ $1/T =$ Frequenz = Anzahl Schwingungen pro Zeit $= \nu = f$

Harmonische Oszillationen sind Funktionen der Form

$$S(t) = c \sin(\omega t + \alpha) = c \cos(\omega t + \beta),$$

- ▶ periodisch mit Periode $T = 2\pi/\omega$ 
- ▶ $c =$ Amplitude
- ▶ $\alpha =$ Phasenverschiebung
- ▶ $\omega =$ (Kreis-)Frequenz $= 2\pi\nu$.

Additionstheoreme (ohne Beweis):

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Beispiel:

Bestimmung der Höhe eines Baumes $h = h_1 + s \tan \alpha$
aus der Messung von h_1 , s und α .



\sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend
 \rightsquigarrow Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

entsprechend \cos auf $[0, \pi]$ \rightsquigarrow Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

und \tan auf $(-\pi/2, \pi/2)$ \rightsquigarrow Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$

Beispiel: Sonnenhöhe

s : Länge eines senkrechten Stabes

b : Länge seines Schattens

Sonnenhöhe: $\varphi = \arctan(s/b)$. 