

# Lineare Gleichungssysteme

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Stefan Keppeler

7. Dezember 2009

## Definition

Beispiel: Wassermengen und Konzentrationen in einem Fluss

## Eliminationsverfahren

Beispiel

Zeilenstufenform

Beispiel (Fortsetzung)

## Unterräume

## Lösungsmengen

Beispiel

## Anhang

Beispiel: Tomographie

**Definition:** Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) ist ein System von  $n$  Gleichungen der Form

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

mit Unbekannten  $x_1, \dots, x_m$  und bekannten Koeffizienten  $a_{ij}$  und  $b_i$ .

- ▶ Äquivalent kann man schreiben  $A\vec{x} = \vec{b}$ , wobei  $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$  gesucht ist, und  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n, m)$  und  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$  vorgegeben sind.
- ▶ Das Gleichungssystem heißt **homogen**, falls  $\vec{b} = \vec{0}$ , sonst **inhomogen**.
- ▶ Die **Lösungsmenge** ist

$$L_{\vec{b}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\vec{x} = \vec{b}\}.$$

Betrachte ein Gewässer (Fluss) mit


- ▶ mehreren Zuflüssen ( $j = 1, \dots, n$ ) und
- ▶ einem Abfluss.

Wir interessieren uns für die einzelnen **Zuflussmengen**  $Q_j$ .

**Aber:** Messung aller zu aufwändig.

Messe stattdessen

- ▶ Abflussmenge  $Q_{\text{ges}}$  (z.B. an einem Wehr) und
- ▶ Konzentrationen verschiedener Stoffe
  - ▶ im Abfluss,  $c_{\text{ges}}^{\text{Stoff}}$ , und
  - ▶ in allen Zuflüssen,  $c_j^{\text{Stoff}}$ .

Bestimme daraus die Zuflussmengen  
(unter der Annahme guter Durchmischung). 

**Lösung** durch **Eliminationsverfahren** / **Gauß-Algorithmus**:

Füge Daten  $A$  und  $\vec{b}$  zur einer  $n \times (m + 1)$ -Matrix  $B = (A|\vec{b})$  zusammen. Erlaubte Operationen:

1. **Vertauschen** zweier Zeilen von  $B$ .

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

2. **Multiplikation** einer Zeile von  $B$  mit Faktor  $\alpha \neq 0$ .

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right) | \cdot 2 \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

3. **Addition** des  $\alpha$ -fachen einer Zeile von  $B$  zu einer anderen.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow^{-4} \\ \leftarrow_{+} \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{array} \right)$$



Anwendung am folgenden LGS

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 16 \quad (1)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 14 \quad (2)$$

$$-5x_1 - 5x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{11}{3}x_4 = -\frac{23}{3} \quad (3)$$

kompakt geschrieben:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3 \end{array} \right)$$



$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc|c}
 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\
 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\
 -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3
 \end{array} \right) \quad | \quad -1/4 \\
 \hline
 \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\
 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\
 -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3
 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \\ + \\ + \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 \\ \\ \end{array} \\
 \hline
 \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\
 0 & 0 & 3/2 & -3 & 6 \\
 0 & 0 & 37/12 & -37/6 & -37/3
 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \cdot 2/3 \\ \cdot 12/37 \end{array} \right. \\
 \hline
 \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & 4
 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \right\} \\
 \hline
 \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

LGS ist nun auf **Zeilenstufenform**,  
 allgemein: (\* heißt "kann  $\neq 0$  sein")

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc|cc} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & \dots & \dots & * & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & \dots & * & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * \end{array} \right)$$

**Bemerkung:** Ob an den Stufen wirklich 1en stehen ist egal,  
 entscheidend ist, dass die Zahlen in den Kästchen  $\neq 0$  sind.



$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Diesem Schema entsprechen die umgeformten Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 4 \\ x_3 - 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

- Auflösen nach  $x_1$  und  $x_3$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - x_2 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 &= 4 + 2x_4 \end{aligned}$$

- Wähle  $x_2 = s \in \mathbb{R}$ ,  $x_4 = t \in \mathbb{R}$  beliebig  $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - s - t \\ x_3 &= 4 + 2t \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Anders gesagt, die Lösungsmenge ist

$$L_{\vec{b}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Definition:** Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt **Unterraum** (des  $\mathbb{R}^n$ ), falls  $U$  ebenfalls ein Vektorraum ist, d.h insbesondere falls aus  $\vec{u}, \vec{v} \in U$  folgt, dass auch  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in U \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Definition:**

Der **von den Vektoren**  $\vec{u}^{(1)}, \dots, \vec{u}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  **aufgespannte Unterraum** ist die Menge

$$\langle \vec{u}^{(1)}, \dots, \vec{u}^{(k)} \rangle := \left\{ \alpha_1 \vec{u}^{(1)} + \dots + \alpha_k \vec{u}^{(k)} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

- ▶  $\alpha_1 \vec{u}^{(1)} + \dots + \alpha_k \vec{u}^{(k)}$  heißt **Linearkombinationen** (LK) der Vektoren  $\vec{u}^{(1)}, \dots, \vec{u}^{(k)}$ .
- ▶ Unterräume heißen auch **Teilräume oder lineare Teilräume**.
- ▶ Im Fall  $k = 0$  setzen wir  $\langle \rangle = \{\vec{0}\}$ .



**Satz:** Die Lösungsmenge  $L_{\vec{0}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$  eines homogenen linearen Gleichungssystems ist stets ein Unterraum.

**Beweis:** 

**Satz:** Ist  $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$  irgendeine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b}$ , ist also  $A\vec{u} = \vec{b}$ , dann ist die Lösungsmenge  $L_{\vec{b}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$  gegeben durch

$$L_{\vec{b}} = \vec{u} + L_{\vec{0}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid \vec{x} = \vec{u} + \vec{y}, \vec{y} \in L_{\vec{0}}\}.$$


**Beweis:** 

**Beachte:**  $L_{\vec{b}}$  kann leer sein, obwohl  $L_{\vec{0}}$  nie leer ist.

**Bemerkung:** Mengen der Form  $\vec{u} + L_{\vec{0}}$ , wobei  $L_{\vec{0}}$  ein Unterraum ist, heißen auch **affine Teilräume**. Sie entstehen aus (linearen) Teilräumen durch Translation.



- ▶ Anton und Berta sind Geschwister
- ▶ Anton hat doppelt so viele Schwestern wie Brüder
- ▶ Berta hat gleich viele Schwestern wie Brüder

Wieviele Kinder gibt es in der Familie? 

## Beispiel: Tomographie

- ▶ Transmissionskoeffizienten (2D)

$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$
$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$



- ▶ Schattenbild ergibt Gesamttransmission

$$\lambda_1 = \alpha_{11}\alpha_{12}, \quad \lambda_2 = \alpha_{21}\alpha_{22},$$

$$\mu_1 = \alpha_{11}\alpha_{21}, \quad \mu_2 = \alpha_{12}\alpha_{22}.$$

- ▶ Logarithmieren,  $\log \lambda_1 = \log \alpha_{11} + \log \alpha_{12}$  etc., führt auf das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log \alpha_{11} \\ \log \alpha_{12} \\ \log \alpha_{21} \\ \log \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log \lambda_1 \\ \log \lambda_2 \\ \log \mu_1 \\ \log \mu_2 \end{pmatrix}$$