

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen  
Differenzialgleichungen

Stefan Keppeler

8. Februar 2010

## Differenzialgleichungen

Beispiel: Luftdruck

Definition

Beispiele: Populationsdynamik

## Existenz und Eindeutigkeit

Satz von Picard und Lindelöf

Folgerungen/Bemerkungen

## Reduktion...

...von DGLn höherer Ordnung auf Systeme 1. Ordnung

Folgerungen/Bemerkungen

## Beispiel

Reaktions-Kinetik

Der **Luftdruck**  $p$  erfüllt als Funktion der **Höhe**  $z$  über dem Boden die Differenzialgleichung

$$p'(z) = -\frac{Mg}{RT(z)} p(z)$$

mit **Konstanten**  $M, g, R$  und der **Temperatur**  $T(z)$ . **Warum?** 

**Lösung** für

- ▶ konstante Temperatur:  $p(z) = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}z}$
- ▶ linearen Temperaturverlauf  $T(z) = T_0 + \gamma(z - z_0)$  ( $T_0, z_0 \in \mathbb{R}$ ):

$$p(z) = p_0 \left(1 + \frac{\gamma}{T_0}(z - z_0)\right)^{-\frac{Mg}{R\gamma}}$$

mit zunächst frei wählbarer Konstante  $p_0 \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Nachrechnen! (Ableiten & Einsetzen)

**Aber wie kommt man d'rauf?** 

**Definition:** Eine **Differenzialgleichung** (DGL) ist eine funktionale Beziehung zwischen einer Funktion  $\vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $t \mapsto \vec{x}(t)$ , und ihren ersten  $k$  Ableitungen, d.h.

$$\frac{d^k \vec{x}}{dt^k}(t) = \vec{f} \left( \vec{x}(t), \frac{d\vec{x}}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1} \vec{x}}{dt^{k-1}}(t), t \right). \quad (*)$$

- ▶ Dabei heißt
  - ▶  $k$  die **Ordnung** der DGL,
  - ▶  $d$  die Dimension bzw. die Anzahl der **Freiheitsgrade**.
- ▶ (\*) heißt auch auch **System von  $d$  gekoppelten Gleichungen**, wenn man statt des Vektors  $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^d$  die Komponenten  $x_1(t), \dots, x_d(t) \in \mathbb{R}$  als abhängige Variablen auffaßt.
- ▶ Falls  $f$  nicht von  $t$  abhängt, so heißt die DGL **autonom**.

**Beispiele:** 

## Population habe konstante Wachstumsrate

$$w = g - s$$

mit

- ▶  $g$  = Geburtenrate,
- ▶  $s$  = (natürliche) Sterberate.

Einfachstes Modell für Populationsgröße  $N(t)$  ist

$$\dot{N} = wN.$$

- ▶ autonome DGL
- ▶ erster Ordnung ( $k = 1$ )
- ▶ in einem Freiheitsgrad ( $d = 1$ )

Allgemeinen Lösung (exponentielles Wachstum):

$$N(t) = N_0 e^{wt}.$$

Entnimmt der Mensch (durch Ernten, Jagen, Fischen) die Menge  $E(t) dt$  im Zeitintervall  $[t, t + dt]$ , so lautet die DGL

$$\dot{N} = wN - E.$$

Diese Gleichung ist **nicht autonom**,  $f(N, t) = wN - E(t)$ .

Typische Fragestellungen:

- ▶ Funktion  $t \mapsto E(t)$  explizit bekannt, z.B.  $E(t) = c \sin(\omega t)$ :  
Bestimme Lösung  $N(t)$  (analytisch oder numerisch).
- ▶ Oft stellt man aber auch die Frage, wie man  $E$  wählen sollte, um ein bestimmtes Verhalten von  $N$  zu erhalten (z.B. keine dramatische Schrumpfung).

## Satz von Picard und Lindelöf (1890)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $f$  ein Vektorfeld auf  $D$ ,  $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \quad (*)$$

Unter technischen Bedingungen an  $D$  und  $f$  ( $D$  eine offene Menge,  $f$  erfüllt eine Lipschitz-Bedingung) gilt:

- ▶ Für jedes  $\vec{x}_0 \in D$  existiert **genau eine** Lösungsfunktion  $t \mapsto \vec{x}(t)$  von (\*).
- ▶ Die Lösung ist definiert auf einem Intervall  $(T_{\text{Anfang}}, T_{\text{Ende}})$ , das  $t_0$  enthält,
- ▶ wobei  $T_{\text{Anfang}} = -\infty$  und/oder  $T_{\text{Ende}} = \infty$  sein kann, aber nicht sein muss.




## Folgerung/Bemerkungen:

- ▶ Zwei Lösungskurven können sich **nie schneiden**, denn falls

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{f}(\vec{x}) & \text{und} & & \dot{\vec{y}} &= \vec{f}(\vec{y}) \\ \text{sowie} & & & & \vec{x}(t_0) &= \vec{y}(t_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \vec{y}(t) \text{ für alle } t.$$

- ▶ Eine Lösung  $\vec{x}(t)$  kann nach endlicher Zeit aufhören zu existieren, indem sie
  - ▶ den Rand des Definitionsbereiches  $D$  erreicht.  
**Beispiel:**  $x$  reell und positiv:  $D = [0, \infty)$ .  
Sinkt  $x(t)$  auf Null, so kann es nicht mehr weiter sinken. (z.B. Populationsgröße) 
  - ▶ sie in endlicher Zeit ins Unendliche wächst (Singularität).

**Beispiel:** 






Jede DGL ist äquivalent zu einem DGL-System erster Ordnung, indem man für die Ableitungen von  $x$  neue Variablen einführt.

**Beispiel:** Aus ( $k = 2$ ,  $d = 1$ )

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

machen wir 

- ▶ ein DGL (System) erster Ordnung mit zwei Gleichungen ( $k = 1$ ,  $d = 2$ );
- ▶  $kd$  ändert sich nicht.

Allgemein wird aus einer DGL der Ordnung  $k$

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}, t\right)$$

ein DGL-System erster Ordnung mit  $k$  Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} x_1 := x & & \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 := \dot{x} & = \dot{x}_1 & \dot{x}_2 = x_3 \\ x_3 := \ddot{x} & = \dot{x}_2 & \dot{x}_3 = x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k := \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} & & \dot{x}_k = f(x_1, \dots, x_k, t) \end{array}$$

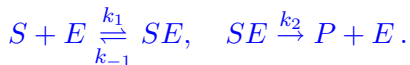
Der Raum  $\mathbb{R}^k$  mit den Achsen  $x_1, \dots, x_k$  heißt **Phasenraum**.



## Folgerungen/Bemerkungen:

- ▶ Mit Picard-Lindelöf überträgt sich Existenz und Eindeutigkeit; Dabei sind bei einer DGL der Ordnung  $k$  als Anfangswerte die Werte von  $x(t_0)$ ,  $\dot{x}(t_0)$ ,  $\dots$ ,  $\frac{d^k x}{dt^k}(t_0)$  vorzugeben.
- ▶ Im Phasenraum können sich zwei Lösungskurven nie schneiden.
- ▶ Gilt analog für ein System der Ordnung  $k$  mit  $d$  Gleichungen: Diese lassen sich auf ein System erster Ordnung mit  $kd$  Gleichungen umschreiben.

**Michaelis-Menten-Kinetik (1913):** Reaktion unter Einfluss eines Enzyms,



- ▶  $S$  Substrat
- ▶  $E$  Enzym
- ▶  $SE$  Komplex
- ▶  $P$  Produkt
- ▶  $k_{-1}, k_1$  und  $k_2$  **Ratenkonstanten** (Parameter); legen Reaktionsraten (Reaktionsgeschwindigkeiten) fest.

**Massenwirkungsgesetz:** Reaktionsrate ist proportional ist zum Produkt der Konzentrationen der Reaktanten,

$$s = [S], \quad e = [E], \quad c = [SE], \quad p = [P].$$

Massenwirkungsgesetz liefert DGL-System:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -k_1 es + k_{-1} c, & \frac{de}{dt} &= -k_1 es + (k_{-1} + k_2) c \\ \frac{dc}{dt} &= k_1 es - (k_{-1} + k_2) c, & \frac{dp}{dt} &= k_2 c.\end{aligned}$$

Anfangsbedingungen:

$$s(0) = s_0, \quad e(0) = e_0, \quad c(0) = 0, \quad p(0) = 0.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems liefert uns die Konzentrationen als Funktion der Zeit.

## Vereinfachungen:

- ▶ Die letzte Gleichung ist **entkoppelt** ( $p$  taucht nur dort auf)

$$\Rightarrow \quad p(t) = k_2 \int_0^t c(u) \, du \quad p \text{ ist allein durch } c \text{ bestimmt}$$

- ▶ Enzym  $E$  ist Katalysator: Gesamtkonzentration (frei plus kombiniert) ist konstant,

$$\frac{de}{dt} + \frac{dc}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad e(t) + c(t) = e_0.$$

**Erhaltungssatz** (vgl. z.B. Energie-Erhaltungssatz in der Physik). Folgt aus DGL-System, indem man die zweite und die dritte Gleichung addiert.



Wir erhalten somit das vereinfachte DGL-System

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1}) c,$$

$$\frac{dc}{dt} = k_1 e_0 s - (k_1 s + k_{-1} + k_2) c$$

mit Anfangsbedingungen  $s(0) = s_0, c(0) = 0$ .

Nicht analytisch lösbar, **aber** qualitatives Verhalten ablesbar:

- ▶ Bei  $t = 0$  fällt  $s$ , während  $c$  steigt, von 0 beginnend
- ▶ solange  $c$  noch klein ist, muss  $s$  weiter fallen und  $c$  weiter steigen
- ▶  $c$  steigt so lange bis  $\frac{dc}{dt} = 0$ , d.h.  $c = \frac{k_1 e_0 s}{k_1 s + k_{-1} + k_2}$ ;  
an dieser Stelle gilt  $\frac{ds}{dt} = -k_2 c$ , also fällt  $s$  immer noch.

