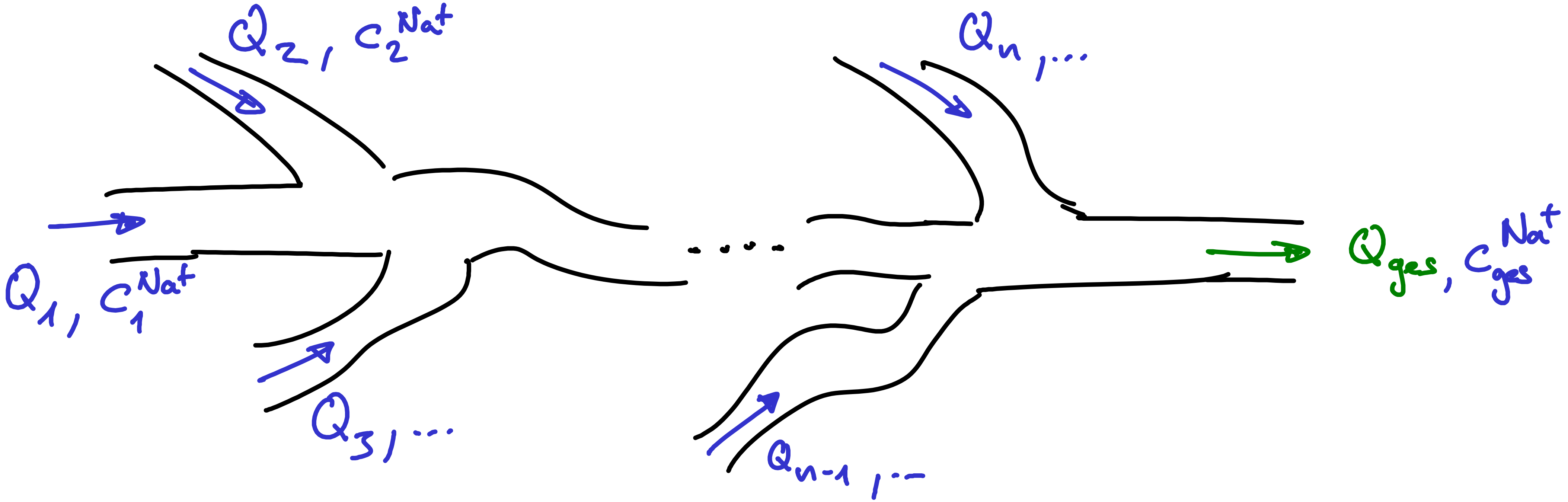


Konzentrationen von z.B. Na^+, K^+, NO_3^-, NO_2^-, HSO_4^-, Pb^{2+}, Cd^{2+}, ...
in Zuflüssen 1, ..., n und Abfluss

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = Q_{ges}$$ (keine Verdunstung etc.)

$$c_1^{Na^+} Q_1 + c_2^{Na^+} Q_2 + \dots + c_n^{Na^+} Q_n = c_{ges}^{Na^+} Q_{ges}$$

analog für andere Stoffe

- k Stoffe : $k+1$ Gleichungen
- n Variablen

hoffe auf eindeutige Lösung für $k = n-1$
(oder besser: überbestimmt ...? mehr Stoffe)

geschickt: $x_j = Q_j / Q_{ges}$ (teile alle Glg. durch Q_{ges})

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

$$c_1^{Na^+} x_1 + \dots + c_n^{Na^+} x_n = c_{ges}^{Na^+}$$

Kurzschreibweise

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ c_1^{Na^+} & & \dots & c_n^{Na^+} & c_{ges}^{Na^+} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

bedeutet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{=A} \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ausführlicher

$$1 \cdot x_1 + 2x_2 = 5$$
$$3x_1 + 4x_2 = 6$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \vert \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \quad 5 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \vert \cdot \frac{2}{3} \\ \vert \cdot \frac{12}{37} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform

ausgeschrieben

$$x_1 + x_2 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 4$$

$$x_3 - 2x_4 = 4$$

zweite Zeile: wähle $\underline{\underline{x_4 = t}} \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_3 = 4 + 2t}}$$

erste Zeile: wähle $\underline{\underline{x_2 = s}} \in \mathbb{R}$ beliebig

$$x_1 = 4 - s - \frac{3}{4}(4 + 2t) + \frac{1}{2}t$$

$$x_1 = 1 - s - t$$ Lösung

allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ mit $t, s \in \mathbb{R}$ beliebig

"Ebene im $\mathbb{R}^4$"

z.Z.: $L_{\vec{0}}$ ist Unterraum

- $L_{\vec{0}} \subseteq \mathbb{R}^n$ (offensichtlich)
- $\vec{u}, \vec{v} \in L_{\vec{0}}$ d.h. $A\vec{u} = \vec{0} = A\vec{v}$

Ist auch $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in L_{\vec{0}}$? $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

bzw. ist das Lösung des LGS?

$$A(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = A(\alpha\vec{u}) + A(\beta\vec{v})$$
$$= \alpha(A\vec{u}) + \beta(A\vec{v})$$
$$= \alpha \cdot \vec{0} + \beta \cdot \vec{0}$$
$$= \vec{0} \qquad \square$$

z.z.: $\vec{x} \in L_{\vec{b}} \iff \vec{x} = \vec{u} + \vec{y}$ mit $\vec{y} \in L_{\vec{0}}$

($\vec{u}$ was gegeben)

"$\Leftarrow$": $\vec{x} = \vec{u} + \vec{y}$

$$\Rightarrow A\vec{x} = A\vec{u} + A\vec{y} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

d.h. $\vec{x} \in L_{\vec{b}}$

"$\Rightarrow$": $\vec{x} \in L_{\vec{b}} \iff A\vec{x} = \vec{b}$

$\vec{y} := \vec{x} - \vec{u} \Rightarrow$

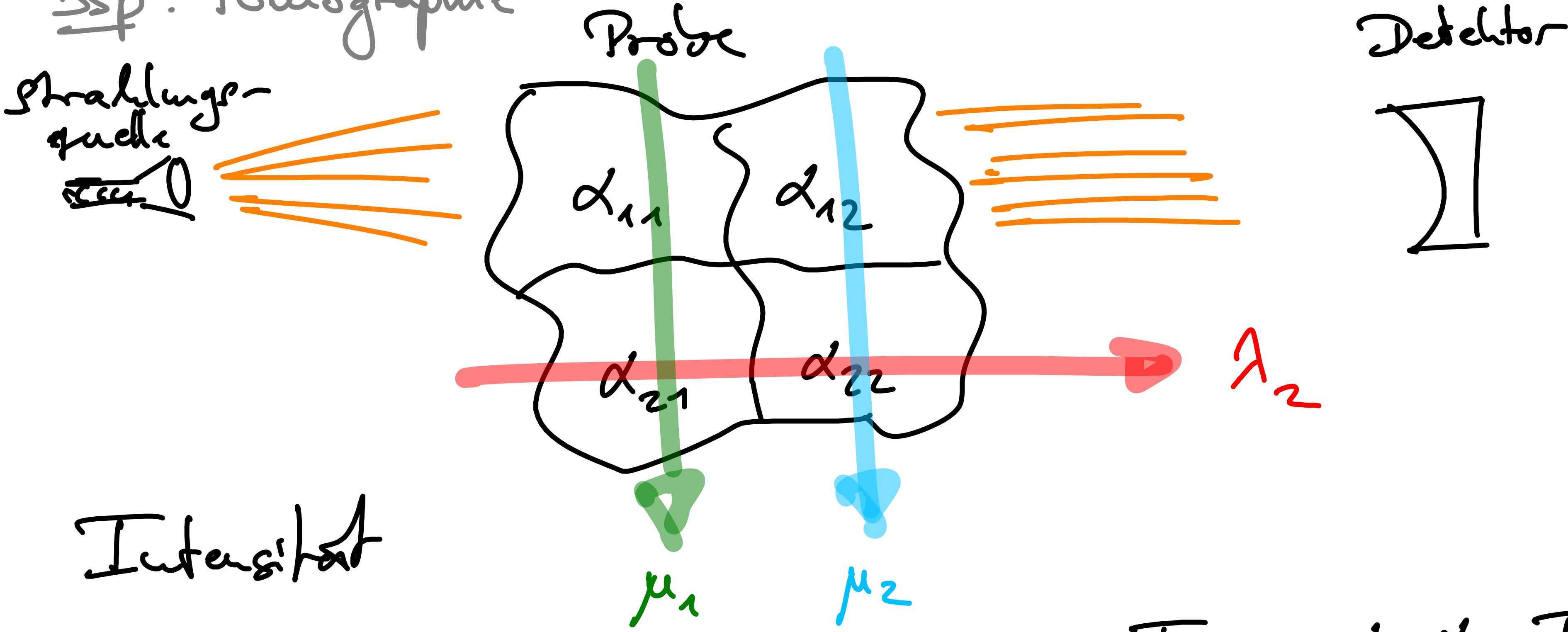
$$A\vec{y} = A\vec{x} - A\vec{u} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

d.h. $\vec{y} \in L_{\vec{0}}$

und damit können wir $\vec{x}$ schreiben als

$\vec{x} = u + \vec{y}$ mit $\vec{y} \in L_{\vec{0}}$ (wie oben definiert) $\square$

Bsp: Tomographie



Intensität

$$I_0 \rightsquigarrow I = \alpha_{11}\,\alpha_{12}\,I_0$$

$$\lambda_1 = \frac{I}{I_0} = \alpha_{11}\,\alpha_{12}$$

messen

gesucht

s_A = # Schwester von Anton

s_B = # Schwestern von Berta

b_A = # Brüder von Anton

b_B = —— " —— Berta

$$\left.\begin{aligned} s_A &= s_B + 1 \\ b_B &= b_A + 1 \end{aligned}\right\} \text{„sind Geschwister"}$$

$$s_A = 2\, b_A$$

$$b_B = s_B$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} s_A \\ s_B \\ b_A \\ b_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_A - s_B &= 1 \\ b_A - b_B &= -1 \\ s_A - 2b_A &= 0 \\ s_B - b_B &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} s_A \\ s_B \\ b_A \\ b_B \end{pmatrix}$$

$b_B = \underline{3}\,, \quad b_A = -1 + b_B = 2$

$s_B = -1 + 2\,b_A = \underline{3}$

$s_A = 1 + s_B = 4$

$\Rightarrow$ 7 Kinder in der Familie