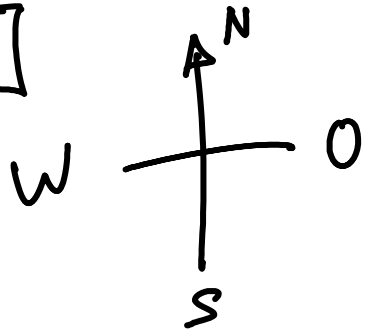
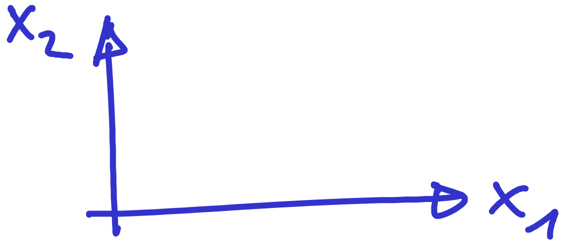
$\boxed{1}$





a) 

$$\vec{v}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}}_{\text{Vektor der Länge 1 Richtung SO}} \cdot \overbrace{4\cancel{\sqrt{2}}}^{\text{Betrag der Geschw.}} = \begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$$

b) 

$$\vec{w} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}_{\text{nach S (aus N)}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Betrag der Windgeschw.}} = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$$

c) 

$$\frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \left(\vec{v}_2 = |\vec{v}_2| \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right)$$

d) $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{w}$

$\Longleftrightarrow \quad \vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{w} \quad = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \underline{|\vec{u}_1|} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \underline{\sqrt{17}}$

e) gesucht: $|\vec{v}_2|$

aus $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2|$ und $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{w}$

$\Rightarrow \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|\vec{u}_2|}_{=|\vec{u}_1| = \sqrt{17}} = |\vec{v}_2 - \vec{w}|$

d.h. $\sqrt{17} = \sqrt{\underbrace{\vec{v}_2^{\,2}}_{=|\vec{v}_2|^2} - 2\underbrace{\vec{v}_2 \vec{w}}_{=0} + \underbrace{\vec{w}^{\,2}}_{=9}}$

$\Rightarrow \quad 17 = |\vec{v}_2|^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}_2| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

f) zurückgelegte Strecke:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot 120 + 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 180$$

$$= \begin{pmatrix} 480 + 360\sqrt{2} \\ -480 \end{pmatrix}$$

d.h. der Vogel befindet sich 480 m südlich und $(480 + 360\sqrt{2})$ m östlich

---

allgemein: $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$

$|\vec{v}| = \sqrt{t^2 + s^2}$, $\vec{v} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = t \cdot t + s \cdot s$

$|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v}^2}$ d.h. $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2$

$\boxed{2}$ a) $L_{21} = \frac{1}{4}$, $L_{43} = \frac{1}{5}$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\vec{x}^{(1)} = L\,\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 500 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40\,000 \\ 500 \\ 250 \\ 100 \end{pmatrix}$$

c) $$\underset{\uparrow}{L}\ \underbrace{\vec{x}^{(-1)}}_{\text{gesucht}} = \underset{\uparrow}{\vec{x}^{(0)}}\ \text{bekannt}$$ d.h. LGS für $\vec{x}^{(-1)}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 80 & 2000 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 500 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$x_4^{(-1)} = 25$
$x_1^{(-1)} = 4000$
$x_2^{(-1)} = 2000$
$x_3^{(-1)} = 2500$

d.h. $$\vec{x}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 2500 \\ 25 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} = L$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 & 0 \end{pmatrix} = L^2$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L^4$$

e) wiederholt sich alle 4 Jahre

f)

$$\vec{x}^{(17)} = L^{17} \cdot \vec{x}^{(0)}$$

$$= \big(\underbrace{L^4}_{=I}\big)^4 \cdot L\,\vec{x}^{(0)} = L\,\vec{x}^{(0)} = \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 40000 \\ 500 \\ 250 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$L^4 \cdot L^4 \neq L^{16}$$

$$L^4 \cdot L^4 = L^8$$

$$(L^4)^4 = L^{(4 \cdot 4)} = L^{16}$$

zu $\boxed{3}$

$\alpha^t \,, \quad \alpha > 0$ (t ist Zeit und nimmt zu)

wächst für $\alpha > 1$

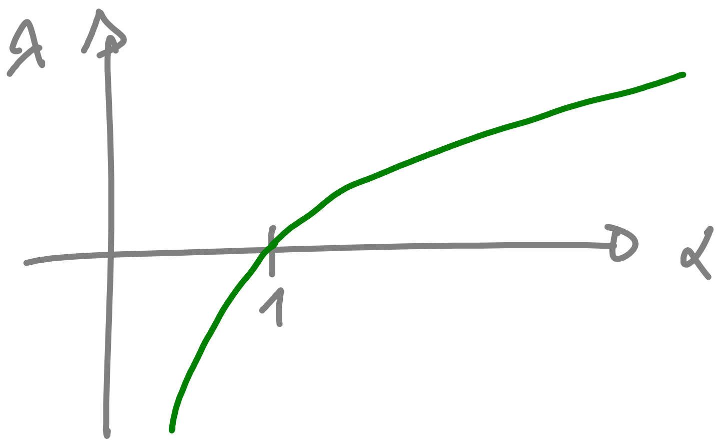
fällt für $\alpha < 1$

$(e^\lambda)^t = e^{\lambda t} \,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

wächst für $\lambda > 0$

fällt für $\lambda < 0$

Zusammenhang $e^\lambda = \alpha$ bzw. $\lambda = \log \alpha$



$\boxed{3}$

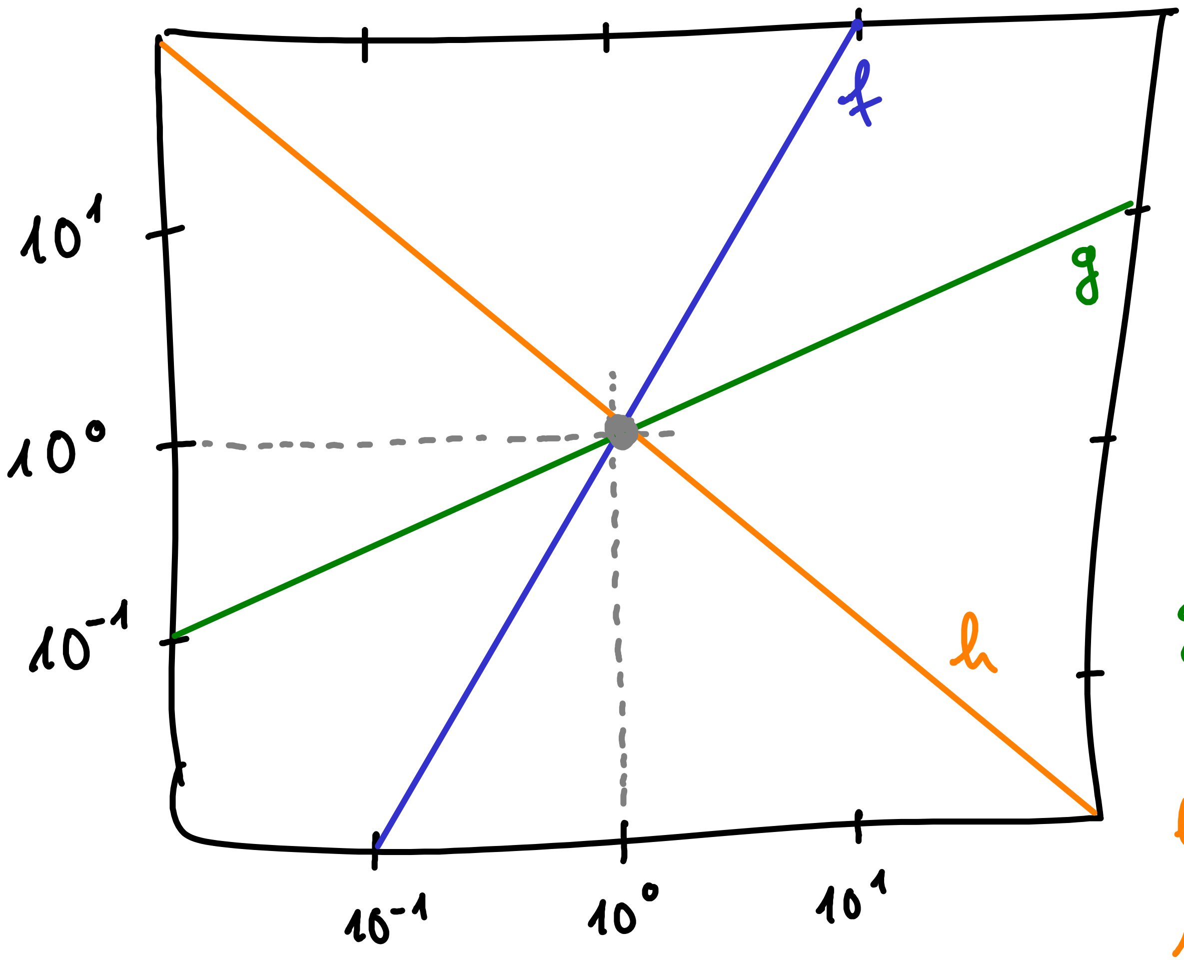
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Z	Z	Z	W	W	W	W	Z	Z	Z
$\alpha = \frac{2}{3}$	$\lambda = -\frac{1}{2}$	$\alpha = \frac{5}{3}$	$\lambda = 2$	$\alpha = 2$	$\alpha = \frac{3}{2}$	$\lambda = \frac{5}{3}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\lambda = -3$	$\alpha = \frac{2}{3}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-t} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\right)^{-t}}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{t}$$

$$\frac{\log 4}{\log 2} = \frac{\log(2^2)}{\log 2} = \frac{2 \cdot \log 2}{\log 2} = 2$$

$\boxed{4}$ a) $f: \alpha = 2$, $g: \alpha = \frac{1}{2}$, $h: \alpha = -1$

b) $y = x^{\alpha} \implies \underline{\log y} = \log(x^{\alpha}) = \alpha \underline{\log x}$



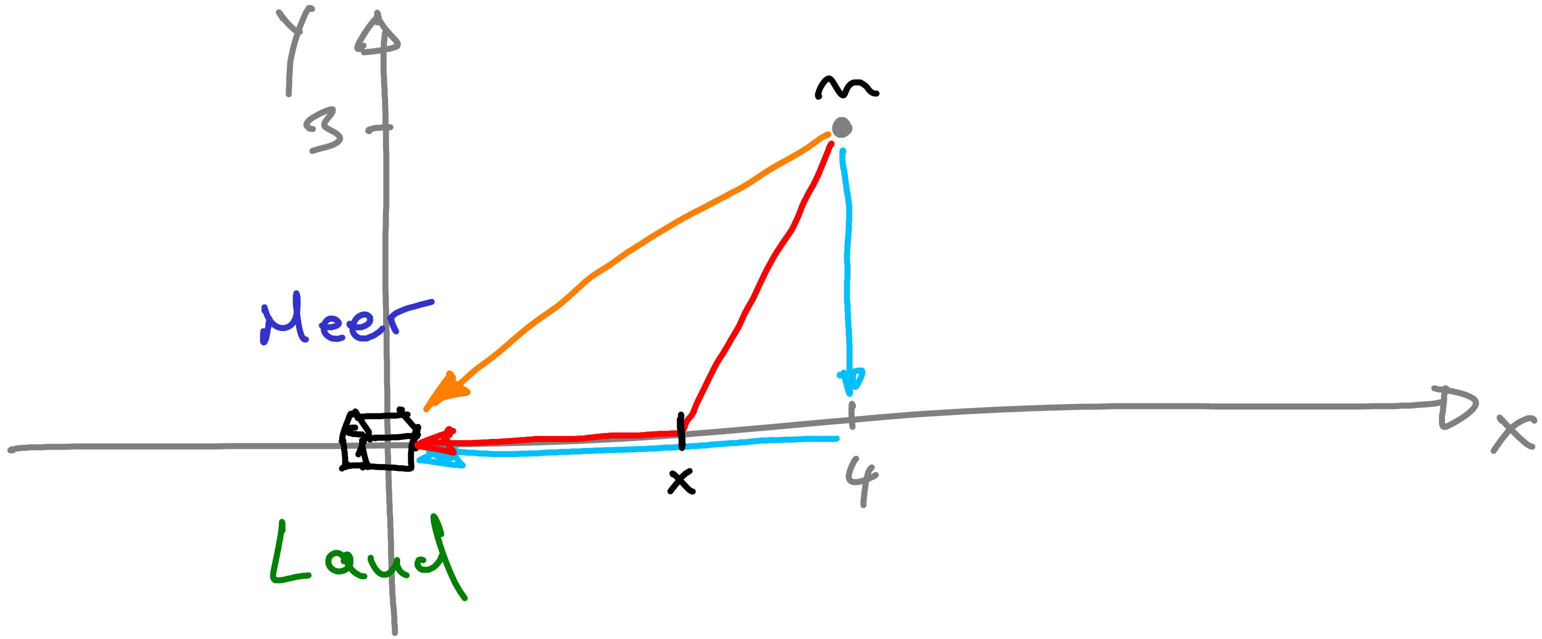
alle müsse durch $(1,1) = (10^0, 10^0)$

f: Steigung 2
1 nach rechts, 2 nach oben

g: Steigung $\frac{1}{2}$
2 nach rechts, 1 nach oben

h: Steigung -1
1 nach rechts, 1 nach unten

5



a) 3 km über Wasser zum Strand

4 km am Strand entlang

und benötigt $3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10$ Energieeinheiten

b) $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ km über Wasser : $5 \cdot 2 = 10$ Energieeinheiten

c) (i) $E(x) = \underbrace{\sqrt{3^2 + (4-x)^2}}_{\text{km über Wasser}} \cdot 2 + \underbrace{x}_{\text{km über Land}} \cdot 1$

$$E(x) = \sqrt{3^2+(4-x)^2}\cdot 2 + x\cdot 1$$

(ii)

$$E'(x) = \frac{\cancel{2}\cdot(4-x)\cdot(-1)}{\cancel{2}\sqrt{9+(4-x)^2}}\cdot 2 + 1 \overset{!}{=} 0$$

abziehen, dann $\sqrt{}$ hoch multipl.

$$\Leftrightarrow \sqrt{9+(4-x)^2} = 2\cdot(4-x)$$

$$\Rightarrow 9+(4-x)^2 = 4(4-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 3 = (4-x)^2 \Rightarrow x = 4-\sqrt{3}$$

(da $4+\sqrt{3}$ sicher nicht gut ist)

$$3 = 16 - 8x + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 13, \quad \text{d.h.}$$

$$x_{1/2} = \frac{8\pm\sqrt{64-52}}{2} = 4\pm\sqrt{16-13} = 4\pm\sqrt{3}$$

Verbraucht die Taube so (Flug bis $(4-\sqrt{3},0)$ und weiter an Strand) wirklich am wenigsten Energie?

Wir wissen $E(0) = 10 = E(4)$, $E(x)$ stetig und $E(x)$ hat höchstens ein lokales Extremum zwischen 0 und 4 (nämlich an der Stelle $4-\sqrt{3}$)

$$E(4-\sqrt{3}) = \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}\cdot 2 + 4-\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{12}\cdot 2 + 4 - \sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3} + 4 - \sqrt{3}$$

$$= 4 + 3\sqrt{3} < 10 \quad (\text{da } \sqrt{3} < 2)$$

also Minimum

$$\frac{(4-x)\cdot(-1)}{\sqrt{9+(4-x)^2}}\cdot 2+1 \overset{!}{=} 0 \quad \Big| + \frac{(4-x)}{\sqrt{\ldots}}\cdot 2$$

$$1 = \frac{(4-x)}{\sqrt{9+(4-x)^2}}\cdot 2 \quad \Big| \cdot \sqrt{9+(4-x)^2}$$

$$\sqrt{9+(4-x)^2} = 2(4-x)$$

$\boxed{16}$ a) schönes empirisches Gesetz für $2 < M \leq 7$

b) aus MATLAB

$$\log n = 17 - 2M$$

Auflösen nach n: $\underline{\underline{n}} = e^{17} \cdot e^{-2M}$

ist gesuchtes $n(M)$

c) $$W = 10^{\frac{3}{2}M - 2}$$

wir haben: $n(M)$, $W(M)$, gesucht: $n(W)$

① $M(W)$ (auflösen)

$$\log_{10} W = \frac{3}{2}M - 2$$

$$\log W = \left(\frac{3}{2}M - 2\right) \log 10$$

$$\Leftrightarrow \quad M = \left(2 + \frac{\log W}{\log 10}\right)\frac{2}{3}$$

② einsetzen in $n(M) = e^{17} \cdot e^{-2M}$

$$n(W) = e^{17}\, e^{-\frac{8}{3} - \frac{4}{3}\frac{\log W}{\log 10}}$$

$$= e^{17-\frac{8}{3}}\, e^{-\frac{4}{3\log 10}\log W}$$

$$= e^{17-\frac{8}{3}}\, W^{-\frac{4}{3\log 10}}$$

d) Potenzgesetz