Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 08.01.2010)

Aufgabe 45 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie für alle Vektorräume aus Aufgabe 41 b-f die Dimension, und geben Sie jeweils eine Basis an.

b) Seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^{10}$ mit $\dim U = 4$ und $\dim V = 7$ und Basen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4$ von U und $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_7$ von V. Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}\left(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_7\right)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an!

Aufgabe 46 (10 Punkte)

Welche Dimension hat der durch die folgenden Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^5$,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\3\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\pi\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\3\\9\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\4\\6\\0\\10\end{pmatrix}?$$

Aufgabe 47 (10 Punkte)

$V := \operatorname{span}(1, \sin x, \cos x)$ ist ein Unterraum von $C([-\pi, \pi])$ mit $\dim V = 3$ (vgl. Aufgabe 43). Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f'' + f$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \{g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von V? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 48 (10 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird!

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + 5 a_2 b_2 + 2 a_3 b_3$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$

d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2$

e) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2 a_2 b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig zeigen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!