Klausuraufgabe 6

$$f(x) = \log \frac{2+x}{2-x}$$

a) Definitionsbereich: Argument des log muss positiv sein.

$$\frac{2+x}{2-x} > 0 \iff -2 < x < 2$$

d.h. f ist definiert $\forall x \in (-2,2)$

b) senkrechte Asymptoten bei

$x = 2$ (Nenner im Arg. des log wird Null)

und $x = -2$ (da $\log t \to -\infty$ für $t \to 0+$)

keine waagerechten oder schiefen Asymptoten

c) $\log \frac{2+x}{2-x} = 0 \iff \frac{2+x}{2-x} = 1 \iff x = 0$

einzige NST $x = 0$

d) $f(0) = 0$ (vgl. auch c)

$$f(x) = \log \frac{2+x}{2-x} = \log(2+x) - \log(2-x)$$

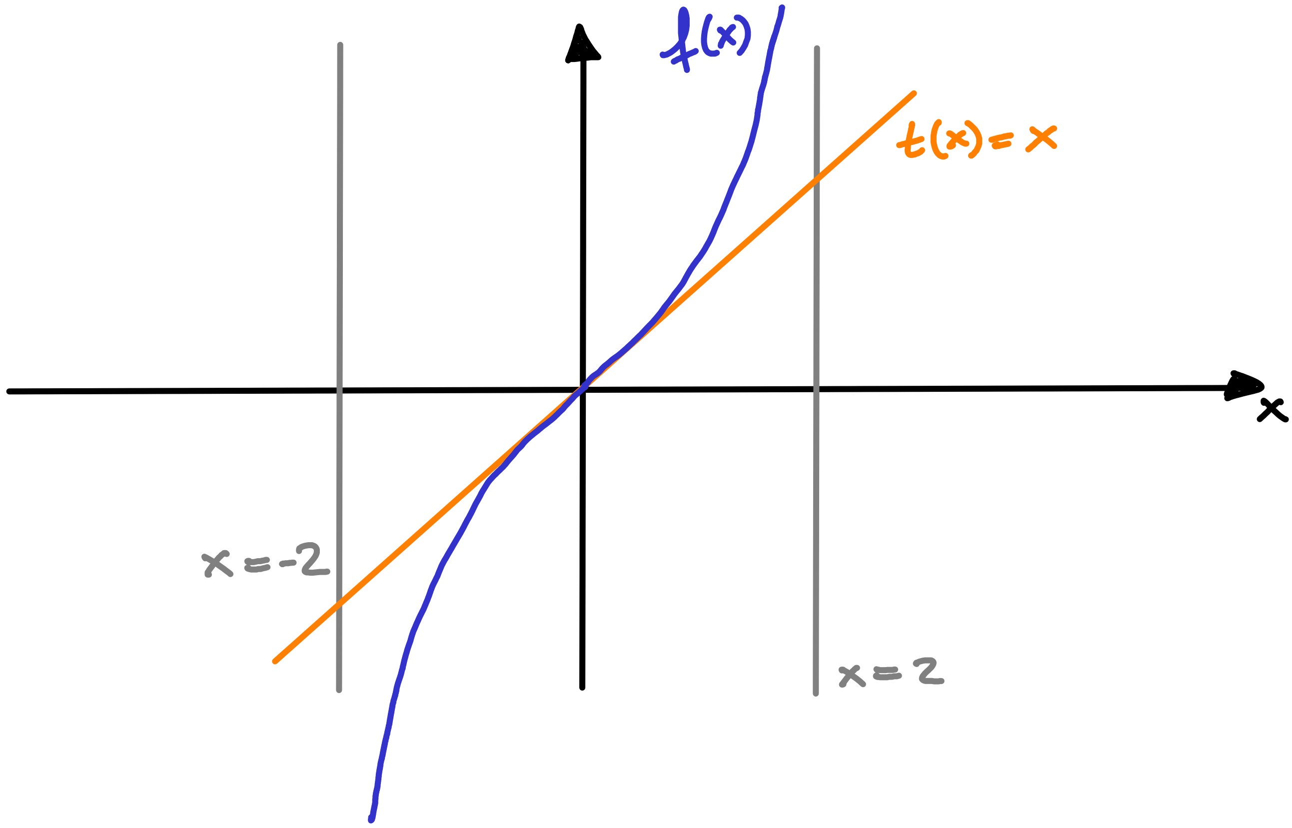
$$f'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$

also $f'(0) = 1$ und damit ist

$$t(x) = f(0) + f'(0)(x-0)$$

$= x$ die Tangente an der Stelle Null

e)



f) $f: (-2,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv

(da f streng monoton wachsend, denn

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} = \frac{2}{2-x^2} > 0 \quad \forall\, x \in (-2,2) \text{)}$$

d.h. $A = (-2,2)$, $B = \mathbb{R}$

$$y = \log \frac{2+x}{2-x} \iff e^y = \frac{2+x}{2-x} \iff e^y(2-x) = 2+x$$

$$\iff 2(e^y - 1) = x(1+e^y) \iff x = 2\,\frac{e^y-1}{e^y+1}$$

d.h. $f^{-1}(x) = 2\,\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$