Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 15.01.2010)

Aufgabe 49 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie eine ON-Basis für $U \subset \mathbb{R}^4$,

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle ,$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 48 e). Beginnen Sie mit den l.u. Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 50 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}$ für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

b) Geben Sie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ an, für die $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Aufgabe 51 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Die folgenden Vektoren[1] bilden für jedes $\theta \in [0, \pi]$ und jedes $\phi \in [0, 2\pi)$ eine ONB des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie weiter, dass die Vektoren (in der angegebenen Reihenfolge) ein Rechtssystem bilden.

Aufgabe 52 (10 Punkte)

Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$,

$$-3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 5 .$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform dieser Ebene an. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

---

[1] Es handelt sich dabei übrigens um die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten, siehe später; für das Lösen dieser Aufgabe müssen Sie aber noch nichts über Kugelkoordinaten wissen.