Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 29.01.2010)

Aufgabe 57 (10 Punkte)

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Polardarstellung von $A\vec{e}_1$ und $A\vec{e}_2$, wobei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ ist. Was bewirkt also die Anwendung von A auf $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$? Schließen Sie daraus auf die Wirkung von A auf beliebige Vektoren $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie A^2 und A^{-1}. Hinweis: Nicht rechnen!

Aufgabe 58 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie damit die Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $X \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und $Y \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad AX = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 4 & 7 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad AY = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 59 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5$

Aufgabe 60 (10 Punkte)

Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix gemäß

$$A^0 = I\,, \quad A^1 = A\,, \quad A^2 = AA\,, \quad A^3 = AAA\,,\ \ldots$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Weiter definieren wir die Matrixexponentialfunktion durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $\exp(A) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$. Berechnen Sie $\exp\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Aus der Matrixaddition (komponentenweise) folgt natürlich

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}\,.$$