Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 14 (Abgabe am 05.02.2010)

Aufgabe 61 (10 Punkte)

Zeigen Sie: $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ mit

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1 \right\}$$

und dem Matrixprodukt $\cdot$ ist für $n \geq 2$ eine nicht-abelsche Gruppe.

Aufgabe 62 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^4 = 9i$. Markieren Sie diese z in einer Skizze der komplexen Ebene.

b) Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

$$\sum_{\nu=0}^{n} \cos(\nu x)\,.$$

Aufgabe 63 (10 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Vektorräume V über K die Dimension und eine Basis an.

a) $V = \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; z_2 = \mathrm{i}z_1 - \mathrm{i}z_3 \right\}$, $K = \mathbb{C}$ b) V wie in a), $K = \mathbb{R}$

Orthonormieren Sie die Basis aus a) bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 64 (10 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det A$, $\det(\,\overline{A^T}\,)$ und $\det(\,\overline{A^T}A)$.

Aufgabe 65 (10 Punkte)

Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{6x^2 - 3 + \sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ d) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{25} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Hinweis: Denken Sie daran, dass $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ ist, wobei F der Gleichung $F'(t) = f(t)$ genügt.