

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 3 (Abgabe am 6.11.2009)

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

$$\text{a) } \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l 3^l \binom{l}{k} \qquad \text{b) } \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n 3^l \binom{l}{k} \qquad \text{c) } \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n 2^{-l} \binom{l}{k}$$

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Das Pascalsche Dreieck baut man wie folgt aus den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ auf:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \\ & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \dots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots \end{array}$$

Dabei wächst also n nach unten und k nach rechts hin. Die Beziehung

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

aus der Vorlesung sagt uns, dass am linken und rechten Rand ausschließlich Einsen stehen. Weiter folgt aus der Funktionalgleichung, dass sich alle anderen Einträge jeweils als Summe der beiden rechts und links darüberstehenden ergibt.

- a) Konstruieren Sie auf diese Weise die ersten 10 Zeilen des Pascalschen Dreiecks!
- b) Was bedeutet die Beziehung

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

aus der Vorlesung am Pascalschen Dreieck?

- c) Wie lässt sich die Spiegelsymmetrie des Pascalschen Dreiecks als Beziehung (Formel) zwischen Binomialkoeffizienten ausdrücken?

Aufgabe 13 (10 Punkte)

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion:

$$\prod_{\nu=1}^n (1 + x_\nu) \geq 1 + \sum_{\nu=1}^n x_\nu \quad \text{falls } x_\nu \geq -1 \quad \text{und} \quad x_\nu x_\mu \geq 0 \quad \forall \mu, \nu.$$

HINWEIS: Denken Sie an den Beweis der Bernoullischen Ungleichung.

Aufgabe 14

(20 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}, \quad g(x) = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad h(x) = x^2 - 1.$$

- a) Bestimmen Sie jeweils Definitions- und Wertebereich (als Teilmengen von \mathbb{R}).
- b) Existieren die folgenden Verknüpfungen? Geben Sie ggf. Definitions- und Wertebereich an.
- | | | |
|------------------|------------------|-------------------|
| (i) $f \circ g$ | (ii) $g \circ f$ | (iii) $f \circ h$ |
| (iv) $h \circ f$ | (v) $g \circ h$ | (vi) $h \circ g$ |
- c) Geben Sie $h \circ f$ und $f \circ h$ explizit an.