Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 20.11.2009)

Aufgabe 20 (10 Punkte)
Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

a) $f(x) = x^3 \mathrm{e}^{-x}$ b) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 7x}$ c) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ d) $f(x) = |x^2 - 1|$

Aufgabe 21 (10 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine an jeder Stelle differenzierbare Funktion. Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung (die dann natürlich von der Ableitung von g abhängt!).

a) $f(x) = \big(g(x)\big)^2 \mathrm{e}^x$ b) $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{g(x)}}{\mathrm{e}^x + 1}$ c) $f(x) = |g(x)|$

Aufgabe 22 (Implizite Ableitung) (10 Punkte)
Die Funktion $y(x)$ sei gegeben durch

$$x^2 y^3 - 3(x+1)^2 = (x^3 - 1)y - 11\,.$$

Berechnen Sie $y(1)$ und $y'(1)$, und stellen Sie die Tangentengleichung im Punkt $(1, y(1))$ auf.

Aufgabe 23 (10 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{7}{n}\right)^{n-3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{4}{n-1}\right)^{n/2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2-n}\right)^{2n}$

Aufgabe 24 (10 Punkte)
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq -n$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} f(x) &= o\big((x-x_0)^n\big), \qquad x \to x_0 \\ \iff \quad (x-x_0)^k f(x) &= o\big((x-x_0)^{n+k}\big), \quad x \to x_0 \end{aligned}$$

Dafür schreibt man auch kurz $(x-x_0)^k\, o\big((x-x_0)^n\big) = o\big((x-x_0)^{n+k}\big)$.

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass

$$o\big((x-x_0)^n\big) + o\big((x-x_0)^m\big) = o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big), \quad x \to x_0$$

c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie die Gültigkeit der Produktregel

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

unter Verwendung der Charakterisierung der Ableitung mit Hilfe von $o(x - x_0)$ (Lemma 4 aus der Vorlesung).