Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 09/10

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 27.11.2009)

Aufgabe 25 (10 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

a) Für welche x sind die Funktionen definiert?
b) Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
c) Zeigen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Aufgabe 26 (10 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$.

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus! Skizzieren Sie nun sinh, cosh und tanh.

Aufgabe 27 (10 Punkte)

Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die Funktionen

a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$.

streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie maximale Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Area Sinus Hyperbolicus*, Funktionsname Arsinh, d.h. $\operatorname{Arsinh}(\sinh(x)) = x$, analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für

a) $\operatorname{Arsinh} x$, b) $\operatorname{Arcosh} x$ und c) $\operatorname{Artanh} x$

an. Bei a) und c) ist dies eindeutig – bei b) sind zwei Zweige anzugeben, analog zum Vorlesungsbeispiel $f(x) = x^2$ mit Umkehrfunktionen von $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ und von $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$.

Aufgabe 28 (10 Punkte)

Berechnen Sie mithilfe von Satz 6 die Ableitungen von

a) $\operatorname{Arsinh} x$, b) $\operatorname{Arcosh} x$ und c) $\operatorname{Artanh} x$.

Aufgabe 29 (10 Punkte)

Skizzieren Sie die Funktionen $f_0, f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0} f_0$ nicht existiert. Also ist f_0 in 0 nicht stetig.
b) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0} f_1 = 0$. Also ist f_1 in 0 stetig.
c) Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass f_1 in 0 nicht differenzierbar ist.
d) Ist die Funktion f_2 differenzierbar an der Stelle Null? Belegen Sie Ihre Antwort!