Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 04.12.2009)

Aufgabe 30 (10 Punkte)

Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

a) $f_1(x) := 3^x$, b) $f_2(x) := x^x$ für $x > 0$, d) $f_3 := h \circ (1/g)$, e) $f_4 := \log(h)$,

wobei $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ beliebige differenzierbare Funktionen sind.

Aufgabe 31 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihen von

a) $\sinh x$ b) $\cosh x$ c) $\operatorname{Artanh} x$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

Hinweis: Denken Sie bei c) an die Herleitung der Taylorreihe von log in der Vorlesung!

Aufgabe 32 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{1+3x^2}$ um Null, b) $\dfrac{1}{3x-2}$ um Null, c) $\dfrac{1}{1-x}$ um $x_0 = 3$,

und geben Sie an, für welche x die Reihen konvergieren.

Aufgabe 33 (10 Punkte)

Bestimmmen Sie die folgenden Grenzwerte (mit Erklärung/Herleitung)!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^5(x)}{x^2(\mathrm{e}^x - 1)^3}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(\log x)}{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos x - 1)^3}{x^7 - 5x^6}$

Aufgabe 34 (Extremwert-Test) (10 Punkte)

Eine Funktion f sei auf dem Intervall $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ n mal stetig differenzierbar und es gelte für $x_0 \in I$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0\,,$$

Zeigen Sie, dass dann die folgenden Implikationen gelten:

(i) n ist ungerade $\implies$ x_0 ist keine Extremalstelle.

(ii) n gerade, $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\implies$ x_0 ist lokale Maximalstelle.

n gerade, $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\implies$ x_0 ist lokale Minimalstelle.

Definition: x_0 heißt lokale Maximal- bzw. Minimalstelle von f, wenn gilt:

$$f(x) < f(x_0) \text{ bzw. } f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \neq x_0 \quad \text{aus einer Umgebung von } x_0\,.$$

x_0 heißt Extremalstelle von f, falls x_0 lokale Maximal- oder Minimalstelle ist.

Hinweise: Stellen Sie $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 durch das $n-1$-te Taylorpolynom plus Restglied dar. Aus $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ folgt natürlich auch $f^{(n)}(\xi) \neq 0\ \forall\ \xi$ in einer kleinen offenen Umgebung von x_0.