Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 11.12.2009)

Aufgabe 35 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihen der Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt)

a) $\dfrac{1}{(2+x)^2}$ b) $\dfrac{\sinh x}{x}$ c) $\dfrac{1}{(2+x)(3x-1)}$ d) $\dfrac{\cos x}{1-x^2}$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

Aufgabe 36 (10 Punkte)

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_{ab} definiert durch

$$f_{ab}(x) = \frac{\sqrt{1+ax^4}}{1-x^2}\mathrm{e}^{-bx^2}$$

bei Null eine Maximastelle, für welche eine Minimalstelle? Belegen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Taylorentwicklung der einzelnen Faktoren.

Aufgabe 37 (10 Punkte)

Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2+1+x+x|x|}{x}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 38 (10 Zusatzpunkte)

Skizzieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \exp(-1/x^2)$ und stetig fortgesetzt bei Null. Berechnen Sie die Taylorreihe von f um Null. Für welche x konvergiert die Reihe? Für welche x konvergiert die Reihe gegen $f(x)$?

(bitte wenden)

Aufgabe 39 (10 Punkte)

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ fest gegeben. Zeigen Sie:
Die Menge der bijektiven Abbildungen $f : (a, b) \to (a, b)$ bildet bezüglich der Komposition (also $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \; \forall \, x \in (a, b)$) eine Gruppe; diese Gruppe ist nicht abelsch.

b) Zeigen Sie: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, d.h. die komplexen Zahlen, mit der üblichen Addition und Multiplikation, ist ein Körper.

Aufgabe 40 (10 Punkte)

a) Sei $(\{1, A, B\}, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1. Füllen Sie die folgende Multiplikationstabelle aus.

$\cdot$	1	A	B
1			
A			
B			

Begründen Sie, dass es nur eine Lösung (also nur eine dreielementige Gruppe) gibt.

b) Ergänzen Sie die folgende Additionstabelle so, dass $(\{0, 1, A, B\}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

$+$	0	1	A	B
0				
1	1	0		
A	A	B		1
B	B			

c) $(\{0, 1, A, B\}, +, \cdot)$ mit den Additions- und Multiplikations-Tabellen aus den Aufgabenteilen a) und b) ist ein Körper (genannt $\mathbb{F}_4$). Verifizieren Sie explizit das Distributivgesetz am Beispiel $(B + 1) \cdot A = B \cdot A + 1 \cdot A$.