

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 18.12.2009)

Aufgabe 41

(10 Punkte)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K ?

- a) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{Q}$, b) $M = \mathbb{Q}^2$, $K = \mathbb{R}$,
 c) $M = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$ d) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{C}$
 e) $M = \{ \text{Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad } \leq 5$
 und Nullstellen bei -3 und 0 $\}$, $K = \mathbb{R}$
 f) $M = \{ \text{Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad } \geq 1$ $\}$, $K = \mathbb{R}$

Aufgabe 42

(10 Punkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren des \mathbb{R}^3 linear abhängig?

- a) $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta^2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 43

(10 Punkte)

Zeigen Sie:

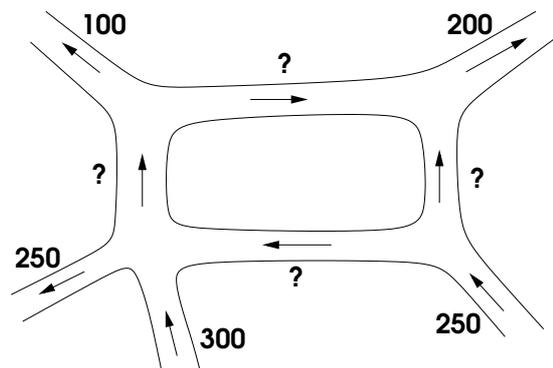
- a) Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, bilden einen Vektorraum über den reellen Zahlen.
 b) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = \cos(x)$ sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.
 c) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2(x)$ und $h(x) = \cos(2x)$ sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.

HINWEIS: Nehmen Sie bei b) an, die Funktionen seien linear abhängig und führen Sie dies zum Widerspruch!

Aufgabe 44

(10 Punkte)

Rechts ist der Ausschnitt eines Stadtplans gezeigt, in dem nur Einbahnstraßen zu sehen sind. An jedem Straßenabschnitt wurde eingetragen, wieviele Autos dort während einer bestimmten Zeit entlang gefahren sind. Wir nehmen an, dass alle Autos ihre Fahrt außerhalb des Ausschnitts begonnen und beendet haben.



Was können Sie über die Anzahl Autos sagen, die die vier mit Fragezeichen markierten Straßen benutzten? Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf, bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform und geben Sie die Lösungsmenge an. Geben Sie außerdem für jede, der vier Straßen die größt- und die kleinstmögliche Zahl an Autos an.

HINWEIS: Zur besseren Vergleichbarkeit bezeichnen Sie bitte die Anzahl der Autos auf den vier Straßen im Uhrzeigersinn mit x_1, \dots, x_4 beginnend mit der unteren.