Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 18.2.2010

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 120 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (5+3 = 8 Punkte)

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

b) Bestimmen Sie den Wert von $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}.$

Aufgabe 2 (4+4+4 = 12 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n+1} x^{-2\nu}$, b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k} 3^{-k}(-1)^{\nu}$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu}{\nu} 2^{\nu}.$

Aufgabe 3 (3+3+3+3+4 = 16 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^5)}{\sqrt{n}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(-1)^n}{(n-1)^2}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(n^3 - \sqrt{n^6+3n^3}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{n/2-1}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))^3}{7x^8+x^6}$

Aufgabe 4 (4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen f, g und h,

$$f(x) = x^{2x}, \qquad g(x) = \log\frac{1+x}{1-x}, \qquad h(x) = \int_{-1}^{\sin(x)} \arcsin(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe 5 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

a) Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

(i) $\displaystyle\frac{2}{7+x^4}$ (ii) $\displaystyle\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x}$ (iii) $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{x^2}$ (stetig fortgesetzt bei $x=0$)

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von e^{-2x} um $x_0 = 5$.

Aufgabe 6 (2+2+2+2+2+4 = 14 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = \log \dfrac{2+x}{2-x}$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen.
d) Bestimmen Sie die Tangente an der Stelle $x = 0$.
e) Skizzieren Sie die Funktion, sowie die Tangente aus Teil (d).
f) Geben Sie möglichst große $A, B \subseteq \mathbb{R}$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$, d.h. geben Sie $f^{-1}(x)$.

Aufgabe 7 (5+2+3 = 10 Punkte)

Zeigen Sie: $(\mathrm{O}(n), \cdot)$ mit

$$\mathrm{O}(n) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I \right\}$$

und dem Matrixprodukt $\cdot$ ist eine Gruppe, d.h.

a) $A, B \in \mathrm{O}(n) \implies A \cdot B \in \mathrm{O}(n)$,
b) $\mathrm{O}(n)$ enthält ein neutrales Element,
c) $A \in \mathrm{O}(n) \implies A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

$V := \operatorname{span}(1, x, x^2, x^3)$ ist ein Unterraum von $C([0,1])$ mit $\dim V = 4$. Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f'$. Bestimmen Sie die Dimension der Unterräume

$$U_1 := \{ f \in V \mid L(f) = 0 \} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \{ g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g \}\ ,$$

und geben Sie jeweils eine Basis an.

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Bestimmen Sie A^2, $\det(A)$ und A^{-1} sowie die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 10 (4+6 = 10 Punkte)

Gegeben seien die folgenden drei Vektoren,

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} , \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \in \mathbb{C}^3 .$$

a) Sind die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear unabhängig (in $\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{C}$)?
b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts in $\mathbb{C}^3$.