1 a) I.A. $n=1$:

links: $\sum_{\nu=1}^{1} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

rechts: $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$n \to n+1$:

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \overset{}{\underset{\text{I.V.}}{=}} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \qquad \square$$

b) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \underset{(a)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

2 a) $$\sum_{\nu=0}^{n+1} x^{-2\nu} = \sum_{\nu=0}^{n+1} (x^{-2})^{\nu} = \frac{x^{-2(n+2)}-1}{x^{-2}-1} \quad \text{für } x \neq 1$$

und $\ldots = n+2$ für $x = 1$

b) $$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{k} 3^{-k} (-1)^{\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \underbrace{\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu}}_{= \begin{cases} 1 & \text{für } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-2k} = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

c) $$\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu}{\nu} 2^{\nu} = \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} 2^{\nu} \cdot 1^{\mu-\nu} \overset{\text{Binomi}}{=} \sum_{\mu=0}^{n} 3^{\mu}$$

$$= \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

$\boxed{3}$ a) $\left|\frac{\sin(n^5)}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

da $|\sin(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^5)}{\sqrt{n}} = 0$$

b) ex. nicht, da Teilfolgen für gerade n und für ungerade n gegen unterschiedliche Grenzwerte gehen,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^2(-1)^{2n}}{(2n-1)^2} = 1 \neq \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2(-1)^{2n+1}}{(2n)^2} = -1$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left[\left(n^3 - \sqrt{n^6+3n^3}\right)\cdot \frac{n^3+\sqrt{n^6+3n^2}}{n^3+\sqrt{n^6+3n^2}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^6-(n^6+3n^3)}{n^3+\sqrt{n^6+3n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n^3}{n^3+\sqrt{n^6+3n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = -\frac{3}{2}$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]\cdot\underbrace{\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}\right]}_{=1}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)} = e^{3/2}$$

Stetigkeit der $\sqrt{\ }$-Funktion

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^3}{7x^8+x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)^3}{7x^8+x^6}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{8}+o(x^6)}{7x^8+x^6} = \frac{1}{8}$$

$\boxed{4}$

$$f(x) = x^{2x} = e^{\log(x^{2x})} = e^{2x\log x}$$

$$f'(x) = e^{2x\log x}\left(2\log x + 2x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{2x}\left(2\log x + 2\right) = 2x^{2x}\left(1+\log x\right)$$

$$g(x) = \log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}(-1) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$h'(x) = \arcsin(\sin x)\cdot(\sin x)' = x\cdot\cos x$$

$\boxed{5}$ a)

(i) $$\frac{2}{7+x^4} = \frac{2}{7}\,\frac{1}{1+\frac{x^4}{7}} = \frac{2}{7}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^v}{7^v}x^{4v}$$

$$= 2\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^v}{7^{v+1}}x^{4v} \quad \text{für } \left|\frac{x^4}{7}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt[4]{7}$$

(ii) $$\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{v=0}^{\infty}x^{2v} \quad \text{für } |x| < 1$$

(iii) $$\frac{e^{-x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^v}{v!}x^{2v} - 1\right) = \frac{1}{x^2}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(-1)^v}{v!}x^{2v}$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty}\frac{(-1)^v}{v!}x^{2(v-1)} = \sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^{v+1}}{(v+1)!}x^{2v} \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

b) $$e^{-2x} = e^{-2(x-5+5)} = e^{-10}\,e^{-2(x-5)}$$

$$= e^{-10}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-2)^v}{v!}(x-5)^v \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

$\boxed{6}$

$$f(x) = \log \frac{2+x}{2-x}$$

a) Definitionsbereich: Argument des log muss positiv sein.

$$\frac{2+x}{2-x} > 0 \iff -2 < x < 2$$

d.h. f ist definiert $\forall x \in (-2,2)$

b) senkrechte Asymptoten bei

$x = 2$ (Nenner im Arg. des log wird Null)

und $x = -2$ (da $\log t \to -\infty$ für $t \to 0+$)

keine waagerechten oder schiefen Asymptoten

c) $\log \frac{2+x}{2-x} = 0 \iff \frac{2+x}{2-x} = 1 \iff x = 0$

einzige NST $x = 0$

d) $f(0) = 0$ (vgl. auch c)

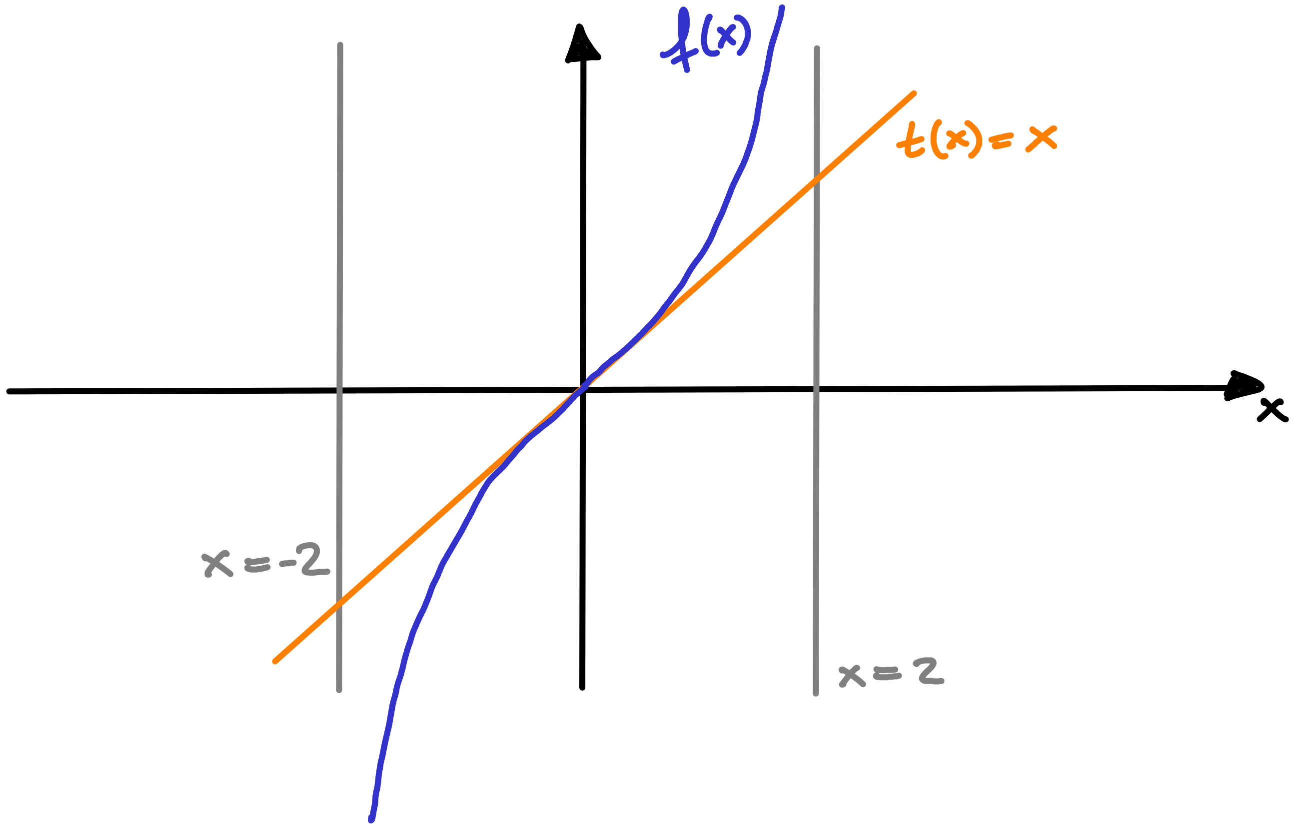
$$f(x) = \log \frac{2+x}{2-x} = \log(2+x) - \log(2-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$

also $f'(0) = 1$ und damit ist

$$t(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0)$$
$$= x$$ die Tangente an der Stelle Null

e)



f) $f: (-2,2) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv

(da f streng monoton wachsend, denn

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} = \frac{2}{2-x^2} > 0 \quad \forall x \in (-2,2)$$)

d.h. $A = (-2,2)$, $B = \mathbb{R}$

$$y = \log \frac{2+x}{2-x} \Leftrightarrow e^y = \frac{2+x}{2-x} \Leftrightarrow e^y(2-x) = 2+x$$

$$\Leftrightarrow 2(e^y - 1) = x(1+e^y) \Leftrightarrow x = 2\,\frac{e^y-1}{e^y+1}$$

d.h. $$f^{-1}(x) = 2\,\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$\boxed{7}$

a) Seien $A, B \in O(n) \Longrightarrow$

$$(AB)^T(AB) = B^T \underbrace{A^T A}_{= I \text{ da } A \in O(n)} B = B^T B = I \quad \text{da } B \in O(n)$$

d.h. auch $(AB) \in O(n)$

b) I (neutrales Element bzgl. $\cdot$) ist $\in O(n)$, denn

$$I^T I = I I = I$$

c) Sei $A \in O(n) \Longrightarrow$

$$A^T A = I \iff A^T = A^{-1}$$

damit ist auch $A^{-1} \in O(n)$, denn

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^{-1} = A A^{-1} = I$$

$\boxed{8}$

$\dim U_1 = 1$ Basis: $\{1\}$

$\dim U_2 = 3$ Basis: $\{1, x, x^2\}$

$\boxed{9}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I \quad \text{d.h. } A \cdot A = 9I \iff \frac{1}{9} A \cdot A = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9} A \quad \text{sowie}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{b} = \frac{1}{9} A \vec{b} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus $A^2 = (\ldots)$ folgt $\det A^2 = 9^4$, und daraus folgt leider nur $|\det A| = 81$. Mit etwas Gauß oder Laplace findet man aber auch $\det A = 81$ (und nicht -81).

$\boxed{10}$ a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \; -i$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \; -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ also l.a.

b)

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{c}_1, \vec{a}_2 \rangle \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \operatorname{span}(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ wobei $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ ONB