Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 30.03.2010

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 113 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 2 (4+4+4 = 12 Punkte)
Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}$ b) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=\nu}^{\infty} \frac{2\nu}{\mu(\mu+1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{\mu-1}$, c) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right)$

Aufgabe 3 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sin(n^5)}{(2n+1)^2}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\log 3}{n}\right)^{n+7}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2-2n}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\left(\mathrm{e}^{-x^4}-1\right)^3}{(x^4-x^3)^4}$

Aufgabe 4 (4+4+4 = 12 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen f, g und h mit

$$f(x) = x^{x/2}\,, \qquad g(x) = \cosh(\operatorname{Arsinh}(x)) \qquad \text{und} \qquad h(x) = \int_2^{x^3} \psi(t^2)\,\mathrm{d}t\,,$$

wobei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion ist.
Hinweis: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^3 = -8$. Markieren Sie diese z in einer Skizze der komplexen Ebene.
Hinweis: Die Polardarstellung $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $r \in [0,\infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, ist hilfreich.

Aufgabe 6 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt) um x_0, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\dfrac{7}{x^2-4}\,, \quad x_0 = 0$ b) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\,, \quad x_0 = 0$ c) $\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}\,, \quad x_0 = 0$

d) $\sin(x)\,, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ HINWEIS: $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Aufgabe 7 (2+2+2+2+2+4 = 14 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen.
d) Bestimmen Sie die Tangente an der Stelle $x = 0$.
e) Skizzieren Sie die Funktion, sowie die Tangente aus Teil (d).
f) Geben Sie möglichst große $A, B \subseteq \mathbb{R}$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$, d.h. geben Sie $f^{-1}(x)$ an.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

$V := \operatorname{span}(1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x})$ ist ein Unterraum von $C([-1,1])$ mit $\dim V = 3$. Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f' + f$. Bestimmen Sie die Dimensionen der Unterräume

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \{g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g\}\ ,$$

und geben Sie jeweils eine Basis an.

Aufgabe 9 (4+4+2+2 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie A^2, A^3, $\det(A)$ und A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -2\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10 (2+6 = 8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden drei Vektoren,

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Sind die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear unabhängig?
b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^3$.