Antworten zu den Testaufgaben

Metrische Räume

1. s. Definition 1.1.1.
2. Ja.
3. $\forall u,\, v \in E,\, d(u,\, v) = \|u - v\|$. Nein.
4. Ja.
5. diskrete Metrik d_δ in $\mathbb{R}^n$, irgendeine nicht dikrete Metrik.
6. vollständig: $(\mathbb{R}^n,\, d_e)$, unendlichdimensional (und vollständig) $\left(\ell^2(\mathbb{Z}),\, d\right)$ mit $d(u,\, v) = \|u - v\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$ und $\|u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^* u_j\right)^{\frac{1}{2}}$.

Konvergenz, Stetigkeit und Kompaktheit

1. Definition 1.2.6.
2. Ja.
3. Ja.
4. Ja.
5. s. Aufgabe 6.
6. s. Aufgabe 26*.
7. s. Aufgabe 26* und Aufgabe 34a.
8. Wir nehmen zuerst an dass es ein $u \in \mathbb{R}$ gibt so dass $f(x_2) > u > f(x_1)$ das nicht in $f(X)$ liegt. Da f stetig ist, ist $Y_u = \{x \in X,\, f(x) < u\} \bigcup \{x \in X,\, f(x) > u\}$ eine disjunkte offene Überdeckung von X. Dies widerspricht der Tatsache dass X zusammenhängend ist.
9. Nein. Gleichmässige Stetigkeit impliziert Stetigkeit (Vergleichen Sie die Definitionen 1.2.5.+1.2.6. und Definition 1.2.12).
10. Ja.
11. Ja.

Differentialrechnung

1. s. Aufgabe 11.
2. Nein. Es gilt die Implikationen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{stetig partiell} & \Longrightarrow & \text{Frechet} & \Longrightarrow & \text{partiell} \\ \text{differenzierbar} & & \text{differenzierbar} & & \text{differenzierbar} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{stetig.} & & \end{array}$$

3. Nein.
4. s. Aufgabe 23 b.
5. Ja.
6. Kein lokales Extremum (Lemma 1.4.23).

7. Nein.
8. Keine.
9. s. Satz 1.4.6.
10. Nein (s. Lemma 1.4.27).

Rechenaufgaben

1. $\inf_{u\in A,\, v\in B} d_e(u,\, v) = 2\sqrt{3}$.
2. $\sup_{u\in C_n,\, v\in C_n} d_e(u,\, v) = \sqrt{n}$.
3. $\arccos\left(\sqrt{7}^{-1}\right)$.
4. s. Aufgabe 26*.
5. periodische Fortsetzung von 0, $(x = 0)$, $\frac{\pi - x}{2}$ $x \in (0,\, 2\pi)$. Konvergiert nicht gleichmaessig.
6. 1.051.
7. Globales Minimum -6 bei $(1,\, -1)$.
8. auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
\nabla f &= (2x,\, 2y)^T \frac{f(x,\, y)}{(x^2+y^2)^2} \\
H_f(x,\, y) &= \frac{2f(x,\, y)}{(x^2+y^2)^4} \begin{pmatrix} -\left(3x^4+2y^2x^2-y^4-2x^2\right) & -2xy\left(2x^2+2y^2-1\right) \\ -2xy\left(2x^2+2y^2-1\right) & \left(-2y^2x^2-3y^4+x^4+2y^2\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

In 0 sind

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(h,\, 0) - f(0,\, 0)}{h} &= 0 \\
\lim_{h\to 0} \frac{f(0,\, h) - f(0,\, 0)}{h} &= 0,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\, 0) = \lim_{h\to 0} & \frac{\partial_x f(0,\, h) - \partial_x f(0,\, 0)}{h} &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,\, 0) = \lim_{h\to 0} & \frac{\partial_y f(h,\, 0) - \partial_y f(0,\, 0)}{h} &= 0.
\end{aligned}$$

9. Untermannigfaltigkeit?
   (a) Nein (Spitze in $x_2 = c$, $x_1 = x_3 = 0$).
   (b) Ja: 3-Sfäre in $\mathbb{R}^3$.