G. Fels, E. Sträng
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10
25 Oktober 2009

# Mathematik für Physiker III

# Übungsblatt 1

**Aufgabe 1:** Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{K}^n$ in der Vorlesung definierten Abbildungen:

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

Normen sind. Zeigen Sie weiter die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ für $1 \le p, q \le \infty$ (d.h., es gibt (von $p$ und $q$ abhängige) Konstanten $c, C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $c\|x\|_p \le \|x\|_q \le C\|x\|_p$ $\forall\, x \in \mathbb{K}^n$). [4]

b) Zeichnen Sie für den $\mathbb{R}^2$ jeweils die Einheitskugel der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$. [2]

**Aufgabe 2:**

a) Zeigen Sie, dass der Raum $\ell^2 := \{(x_m)_{m\in\mathbb{N}} : x_m \in \mathbb{K},\ \sum |x_n|^2 < \infty\}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist und dass durch

$$\langle (x_m), (y_m) \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x}_k y_k$$

ein Skalarprodukt auf $\ell^2$ wohldefiniert wird. [3]

b) Zeigen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\forall\, x, y \in \ell^2 \qquad |\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \ .$$

[3]

**Aufgabe 3:**

a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton. Zeigen Sie, dass durch $g(x, y) := |g(x) - g(y)|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird. [2]

b) Finden Sie eine Metrik auf $\mathbb{R}$, die nicht durch eine Norm induziert wird. [2]

c) Finden Sie eine Metrik $d$ auf $\mathbb{R}$, so dass $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig ist.
**Hinweis:** Finden Sie eine Metrik, bzgl. derer $x_n = n$ eine Cauchy-Folge ist. [2]

**Aufgabe 4:**

a) Es sei $M$ eine beliebige Teilmenge eines metrischen Raumes $X$. Zeigen Sie, dass dann $\overline{M} = \overline{\overline{M}}$. [2]

b) Geben Sie ein Beispiel eines metrischen Raumes $(X, d)$ sowie einer beschränkten und abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$, welche nicht kompakt ist. [2]

c) Bestimmen Sie das Innere und den Rand von [2]

$$W := [0,1] \setminus \left\{ \tfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Aufgabe 5:**

a) Bildet jede stetige Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ Cauchy-Folgen $(x_n)$ in $X$ auf Cauchy-Folgen in $Y$ ab? [3]

b) Es sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ eine stetige Funktionen. Wie viele *stetige* Fortsetzungen $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $f$ (d.h., $\widehat{f}|_{\mathbb{Q}} = f$) gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort. [3]

c) Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ zwei vollständige metrische Räume. Kann man dann auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ eine Metrik $D$ konstruieren, bzgl. der
   - alle Teilmengen der Gestalt $B_r(x) \times B_s(y) \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$, $r, s \in (0, \infty)$ offen in $(X \times Y, D)$ sind und
   - $(X \times Y, D)$ vollständig ist? [4]

$\mathbf{\Sigma}$ =34

**Abgabe:** Montag, 2.11.2009, zu Beginn der Vorlesung.

*Voraussetzungen für die Klausurteilnahme:*

Mindestens 50% der Gesamtpunktezahl aus allen Übungsaufgaben sowie ein einmaliges Vorrechen einer Aufgabe in der Übungsgruppe.

Die Übungsblätter dürfen zu zweit abgegeben werden.