G. Fels, E. Sträng
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10
25 Oktober 2009

Mathematik für Physiker III
Übungsblatt 2

Aufgabe 6: Es sei $f_n(z) := 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ eine Folge von Polynomialfunktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Bekanntlich konvergiert diese Folge gegen die Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ auf der offenen Kugel $B_1(0) \subset \mathbb{C}$. Ferner betrachte man $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(z) := \begin{cases} -(\cos 2\pi x - 1) & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \end{cases}$ und definiere die Funktionsfolge $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_n(x) := h(nx)$. Ist die Konvergenz von (f_n) bzw. von (g_n)

a) punktweise?

b) (global) gleichmäßig?

c) lokal gleichmäßig?

d) Gegen welchen Grenzwert konvergiert g_n?

Begründen Sie Ihre Antwort. [6]

Aufgabe 7: Zeigen Sie: Es seien X_1, X_2 zwei (überdeckungs)kompakte (metrische) Räume. Dann ist auch deren kartesisches Produkt $X_1 \times X_2$ kompakt.
Dabei ist eine Teilmenge $V \subset X \times Y$ genau dann offen in $X_1 \times X_2$ falls $V = \bigcup_j U_{j_1} \times U_{j_2}$, wobei $U_{j_1} \subset X_1$, $U_{j_2} \subset X_2$ beliebige offene Teilmengen sind. [6]

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass in jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $X_1 \times X_2$ eine endliche Teilüberdeckung $\mathfrak{U}(x_1)$ der Menge $\{x_1\} \times X_2$, $x_1 \in X_1$ existiert. Zeigen Sie ferner, dass dann

$$W \times X_2 \subset \bigcup_{V \in \mathfrak{U}(x_j)} V$$

für eine offene, den Punkt x_1 enthaltende Teilmenge $W \subset X_1$ gilt.

Aufgabe 8: Es sei $(\mathbb{Q}, d_e)$ der rationale metrische Raum und X, Y beliebige metrische Räume. Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen kompakt sind:

a) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

b) $f(K)$ wobei $f : X \to Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt ist.

c) $f^{-1}(M)$ wobei $f : X \to Y$ stetig und $M \subset Y$ kompakt ist.

[6]

Aufgabe 9:* Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Konstruieren Sie eine Folge, sodass jeder Punkt in X Häufungspunkt dieser Folge ist.

Hinweis und Bemerkung: Versuchen Sie zunächst eine abzählbare Menge $\mathcal{B}$ von offenen Teilmengen in X zu finden, für die gilt: Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ und $x \in U$ gibt es ein $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subset U$.

Ein Raum X heißt *separabel*, falls es eine abzählbare Teilmenge T gibt, die dicht in X liegt. Somit haben Sie gezeigt, dass jeder kompakte metrische Raum separabel ist. Zur Definition der Dichtheit siehe Def. 1.2.3(c) in der Vorlesungszusammenfassung. [7]

$\mathbf{\Sigma} = 25$

Abgabe: Montag, 9.11.2009, zu Beginn der Vorlesung.