G. Fels, E. Sträng
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10

Mathematik für Physiker III
Übungsblatt 3

Aufgabe 10: Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) Für $f \in C^2(G)$ gilt $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$. [2]

b) Für $g \in C^2(G, \mathbb{R}^3)$ gilt $\operatorname{div}\operatorname{rot} g = 0$. [2]

c) Für $g \in C^2(G, \mathbb{R}^3)$ gilt $\operatorname{rot}\operatorname{rot} g = \operatorname{grad}\operatorname{div} g - \Delta g$. [2]

Aufgabe 11: Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

a) g ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. [1]

b) g ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, die partiellen Ableitungen sind jedoch nicht stetig in $(0,0)$. [2]

c) g ist in $(0,0)$ nicht total differenzierbar. [2]

d) Alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ existieren. [2]

Aufgabe 12:

a) Berechnen Sie die Operatornormen $\|A\|_k$ für $k \in \{1, 2, \infty\}$ und die Frobeniusnorm $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{jk} |a_{jk}|^2}$ von der Matrix [3]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie: je zwei Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind äquivalent (siehe Aufgabe 1a für die Definition). [3]

Aufgabe 13: *

a) Zeigen Sie, dass das Intervall $[0, 1]$ zusammenhängend ist. [4]

b) Zeigen Sie, dass jeder wegzusammenhängende metrische Raum auch zusammenhängend ist. [2]

$\mathbf{\Sigma} = 25$

Abgabe: Montag, 16.11.2009, zu Beginn der Vorlesung.