G. Fels, E. Sträng
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 4

Aufgabe 14: Es seien $(E, \| \, \|)$ und $(E', \| \, \|')$ zwei normierte Räume und $A : E \to E'$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) A ist (global) stetig.

b) A ist stetig in 0

c) A ist beschränkt, d.h., es existiert $C > 0$ mit [6]

Es sei $P([0,1])$ der Vektorraum aller Polynomialfunktionen, eingeschränkt auf das Intervall $[0,1]$ und versehen mit der Supremumsnorm. Ist die Abbildung $F : P([0,1]) \to P([0,1])$, $f \mapsto f''$ linear und stetig? [2]

Aufgabe 15: Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine rotationssymmetrische offene Teilmenge, sowie $f \in C^2(U)$ rotationssymmetrisch, d.h. es existiert eine Funktion $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, sodass $f = h \circ r$ in U mit $r(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Zeigen Sie, dass dann auch Δf rotationssymmetrisch ist. [4]

Aufgabe 16: Es seien (r, φ, z) Zylinderkoordinaten auf $\mathbb{R}^3$, (d.h., es gibt die folgende Beziehung zu den euklidischen Koordinaten: $(x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$). Berechnen Sie den Laplace-Operator Δ in den Zylinderkoordinaten (r, φ, z) [6]

Aufgabe 17: Identifizieren Sie $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ vermöge der Abbildung $z = u + iv \mapsto (u, v)$. Dann läßt sich jede Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als eine Abbildung $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ betrachten. Angenommen, f ist $\mathbb{C}$-differenzierbar in dem Punkt $p = r + is \in \mathbb{C}$, d.h., es existiert der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \in \mathbb{C} \setminus 0 \\ h \to 0}} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \quad \in \mathbb{C} \, .$$

Ist dann f, betrachtet als eine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ total differenzierbar in (r, s)? Welche Gestalt hat die Jacobi-Matrix von F in (r, s)? [6]

Aufgabe 18:* [6]

Es sei $U \subset E$ eine offene Teilmenge eines normierten Vektorraumes und $f : U \to \mathbb{K}^n$in differenzierbare Abbildung. Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

"$Df(p) = 0$ für alle $p \in U$ impliziert, dass f eine konstante Abbildung ist."

$\mathbf{\Sigma}$ =24

Abgabe: Montag, 23.11.2009, zu Beginn der Vorlesung.