G. Fels
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10

Mathematik für Physiker III
Übungsblatt 5

Aufgabe 19:

(a) Es sei $X = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

$$X = g_1(r,\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + g_2(r,\varphi)\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

in den Polarkoordinaten. [3]

(b) Auf $E = \mathbb{R}^3$ betrachte man die folgenden Abbildungen:
$\varphi : E \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2 \\ -x_3 + 3 \end{pmatrix}$ sowie
$\psi : E \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Zeigen Sie, dass φ und ψ Koordinatensysteme auf E sind und berechnen Sie den Koordinatenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$. [3]

(c) Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlichdimensionaler Hilbertraum. Zeigen Sie, dass jedes Element β des Dualraumes V^* die Gestalt $v \mapsto \langle w_\beta, v\rangle$ für ein $w_\beta \in V$ hat. [3]

(d)* Ist die Aussage (c) richtig, wenn $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein unedlichdimensionaler Hilbertraum ist? Punkte gibt es hier nur für eine korrekte Begründung. [9]*
Hinweis. Sie dürfen die folgende Aussage verwenden: *Es sei $W \subset V$ ein Untervektorraum des Hilbertraumes V, abgeschlossen in der induzierten metrischen Topologie, und $x \in V$ ein beliebiger Vektor. Dann gibt es genau ein Element $u \in W$ mit der folgenden Eigenschaft:*

$$\|x - u\| = \inf_{w \in W} \|x - w\|$$

Der Dualraum V^* (für ∞-dimensionale normierte Vektorraüme) ist der Vektorraum aller stetigen linearen Funktionale $V \to \mathbb{K}$.

Aufgabe 20: Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

“Es gibt $m, n \geq 2$ und einen Diffeomorphismus $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $n \neq m$”

[5]

Aufgabe 21:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass f surjektiv und in jedem Punkt lokal invertierbar ist.
Ist f global invertierbar? Zeichnen Sie das Bild von den Geraden $\{(x,a) : x \in \mathbb{R}\}$, $\{(b,y) : y \in \mathbb{R}\}$ und $\{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. [5]

Aufgabe 22: Bekanntlich gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{stetig partiell differenzierbar} & \Rightarrow & \text{total differenzierbar} & \Rightarrow & \text{partiell differenzierbar} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{stetig} & & \end{array}$$

Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht. Geben Sie für jede Umkehrung der obigen Implikationen ein Gegenbeispiel an. Begründen Sie Ihre Antwort. [6]

$\mathbf{\Sigma} = 25$

Abgabe: Montag, 30.11.2009, zu <u>Beginn</u> der Vorlesung.